PiSA 4U

ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



v.1

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων

Εθνικό Πρόγραμμα Ανάπτυξης 2021-2025

Τομεακό Πρόγραμμα Ανάπτυξης 2021 - 2025

Ο Οδηγός δημιουργήθηκε στο πλαίσιο του Έργου «Δημιουργία Ερευνητικών Υποδομών, Επεξεργασία Ερευνητικού Υλικού και Επικοινωνία Αποτελεσμάτων Διεθνών Εκπαιδευτικών Ερευνών» με Επιστημονικό Υπεύθυνο τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων Αναστάσιο Εμβαλωτή. Χρηματοδοτήθηκε βάσει της Προγραμματικής Σύμβασης του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού με το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, μέσω του Τομεακού Προγράμματος Ανάπτυξης 2021-2025.

Επιστημονικός Υπεύθυνος:

Αναστάσιος Εμβαλωτής, Καθηγητής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Διευθυντής Εργαστηρίου Διδακτικής & Σχολικής Παιδαγωγικής

Επιστημονικοί Συνεργάτες:

Ελένη Νόλκα, μαθηματικός, Δρ του Χαροκόπειου Πανεπιστημίου

Κώστας Στουραΐτης, μαθηματικός, Δρ του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Το υλικό PISA4U διατίθεται με άδεια 'Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0'. [ελεύθερη χρήση, αναπαραγωγή, αναδιανομή, παρουσίαση και αξιοποίηση, με την προϋπόθεση να μην υπάρχει πρόθεση εμπορικής εκμετάλλευσης. Απαιτείται αναφορά του δημιουργού ή του δικαιούχου της άδειας. Οποιοδήποτε παράγωγο έργο μπορεί να διανεμηθεί μόνο με την ίδια ή παρόμοια άδεια] https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Περιεχόμενα

Εισαγωγή 6

Κεφάλαιο 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ στο PISA 8

1.1 Τι είναι το PISA; 8

1.2 Κύκλοι και φάσεις του PISA 9

1.3 Ποιος είναι ο στόχος του PISA 10

1.4 Μεθοδολογία της έρευνας 12

Κεφάλαιο 2: Το πλαίσιο αξιολόγησης του PISA για τα Μαθηματικά 15

2.1 Η έννοια του μαθηματικού εγγραμματισμού 15

2.2 Πλαίσιο αξιολόγησης του μαθηματικού εγγραμματισμού στο PISA 16

2.2.1 Ο μαθηματικός συλλογισμός και η επίλυση προβλήματος 16

2.2.2 Το μαθηματικό περιεχόμενο 18

2.2.3 Τα πλαίσια και οι δεξιότητες του 21ου αιώνα 18

2.3 Η εφαρμογή του πλαισίου αξιολόγησης στα θέματα του PISA 21

2.4 Τα επίπεδα μαθηματικής επάρκειας 23

2.5 Παραδείγματα Θεμάτων στην έρευνα PISA 25

2.5.1. Ηλιακό σύστημα 25

2.5.2. Τριγωνικό μοτίβο 28

2.5.3. Αγοράζοντας αυτοκίνητο 32

2.5.4. Φορτηγό για μετακομίσεις 35

2.5.5. Πόντοι 37

2.5.6. Δασική έκταση 39

2.5.7. Συγκέντρωση φαρμάκων στο αίμα 46

2.5.8. Συνθέσεις με κύβους 49

Κεφάλαιο 3: Οι αδυναμίες των μαθητών στην Ελλάδα στα Μαθηματικά όπως καταγράφονται από την έρευνα PISA 52

3.1 Εισαγωγή 52

3.2 Χαμηλή συνολική επίδοση και καθοδική πορεία 53

3.3 Μεγάλο ποσοστό μαθητών χωρίς το στοιχειώδες επίπεδο μαθηματικού εγγραμματισμού 54

3.4 Απουσία κορυφαίων επιδόσεων 55

3.5 Αδυναμίες των μαθητών στο μαθηματικό περιεχόμενο 56

3.6 Αδυναμίες των μαθητών στις πτυχές του μαθηματικού συλλογισμού και της επίλυσης προβλήματος 57

3.7 Η επίδραση του κοινωνικο-οικονομικού επιπέδου στις μαθηματικές επιδόσεις 59

3.8 Διαφορές φύλου 61

3.9 Μεταναστευτικό υπόβαθρο και επίδοση στον μαθηματικό εγγραμματισμό 61

3.10 Αυτοαποτελεσματικότητα στα Μαθηματικά και επίδοση στον μαθηματικό εγγραμματισμό 63

3.11 Άγχος για τα Μαθηματικά και επίδοση στον μαθηματικό εγγραμματισμό 64

3.12 Αναπτυξιακή νοοτροπία (growth mindset) και επίδοση στον μαθηματικό εγγραμματισμό 65

3.13 Η επίδραση της διδασκαλίας 66

Κεφάλαιο 4: Προτάσεις αξιοποίησης του PISA στη διδασκαλία των Μαθηματικών 70

Εισαγωγή 70

4.1 Μαθηματικός εγγραμματισμός στα ισχύοντα προγράμματα σπουδών και τα σχολικά βιβλία 70

4.2 Μαθηματικός εγγραμματισμός στα Νέα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών 72

4.3 Εμπλουτισμός της διδασκαλίας για την προώθηση του μαθηματικού εγγραμματισμού 74

4.4 Ισότητα μαθησιακών ευκαιριών και πρόσβαση σε σύνθετα μαθηματικά 77

4.5 Παραδείγματα αξιοποίησης θεμάτων PISA στη διδασκαλία.....78

4.5.1. Κλάσματα και ποσοστά (ρητοί αριθμοί) με το τριγωνικό μοτίβο 78

4.5.2. Συναρτήσεις με το θέμα «αγοράζοντας αυτοκίνητο».....79

4.5.3. Ιδιότητες της μέσης τιμής με το θέμα «Πόντοι» 80

4.5.4. Πολλαπλές αναπαραστάσεις συνάρτησης με το θέμα «Συγκέντρωση φαρμάκων στο αίμα» 81

4.5.5. Όγκος πρίσματος με το θέμα «Συνθέσεις με κύβους».....83

4.5.6. Ο νόμος των μεγάλων αριθμών με το θέμα «Τροχοί» 85

4.6 Μια αντιστοίχιση θεμάτων με ενότητες διδασκαλίας και με ΠΜΑ του νέου ΠΣ 86

4.6.1. Ζάρια 86

4.6.2. Φορτηγό για μετακομίσεις 87

4.6.3. Άθληση 87

4.6.4. Εκδρομή τάξης 88

4.6.5. Γκαράζ 88

4.6.6. Πίνακας τάξης 88

4.6.7. Πισίνα με ξαπλώστρες 89

4.6.8. Κόλπο με τη σκιά.....89

4.6.9. Εκδόσεις βιβλίων 89

4.6.10. Επιδιόρθωση υπολογιστών στο σπίτι.....90

Κεφάλαιο 5: Δύο βασικά εργαλεία για την υποστήριξη της διδασκαλίας με στόχο τον μαθηματικό εγγραμματισμό 91

5.1 Τι είναι η Τράπεζα Θεμάτων Skills4Life; 91

5.2 Τι είναι το περιβάλλον προσομοίωσης skills4life; 97

Βιβλιογραφικές Αναφορές.....102

Εισαγωγή

Ο οδηγός αυτός αποσκοπεί στο να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς[1] να αξιοποιήσουν τον σχεδιασμό, τη θεωρητική πλαισίωση και τα αποτελέσματα της έρευνας PISA προς την κατεύθυνση του σχεδιασμού και της εφαρμογής αποτελεσματικών διδακτικών πρακτικών για την ενίσχυση του επιπέδου της μαθηματικής επάρκειας των μαθητών τους.

Ειδικότερα, έχει σκοπό να συνδράμει στην εξοικείωση των εκπαιδευτικών με την έννοια του εγγραμματισμού, όπως ορίζεται στο θεωρητικό πλαίσιο του PISA. Ο βαθμός κατάκτησής του από τους μαθητές αποτελεί ένα από τα βασικότερα κριτήρια αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών συστημάτων. Ο εγγραμματισμός διέπει, επίσης, σε μεγάλο βαθμό τα νέα Προγράμματα Σπουδών στο ελληνικό σχολείο. Επιπλέον, στόχος του Οδηγού είναι η εξοικείωση με την ίδια την έρευνα, τα αποτελέσματά της και τις δυνατότητες αξιοποίησής τους στο ελληνικό σχολείο από τον εκπαιδευτικό των Μαθηματικών.

Στην αρχή, στο Κεφάλαιο 1, παρουσιάζεται το διεθνές πρόγραμμα PISA, οι βασικές αρχές του και η έννοια του εγγραμματισμού, με αναφορά στη διαχρονική εξέλιξη της έρευνας και στα βασικά συμπεράσματά της. Ακολουθεί αναφορά στη γεωγραφική κάλυψη και τους κύκλους του PISA, όπου αναλύεται η συμμετοχή των χωρών, οι φάσεις της έρευνας και η εναλλαγή των γνωστικών αντικειμένων που αξιολογούνται σε κάθε περίοδο. Στη συνέχεια, στις ενότητες για τους στόχους και τη μεθοδολογία, παρουσιάζονται ο σκοπός της έρευνας και ο τρόπος συλλογής δεδομένων, τόσο μέσω των τεστ όσο και μέσω ερωτηματολογίων μαθητών και διευθυντών των σχολείων.

Το Κεφάλαιο 2 επικεντρώνεται στον μαθηματικό εγγραμματισμό, αναλύοντας τον ορισμό και το θεωρητικό πλαίσιο που τον διέπει. Περιγράφονται οι βασικές διεργασίες που αξιολογούνται (μαθηματικός συλλογισμός, διατύπωση, εφαρμογή, ερμηνεία), το μαθηματικό περιεχόμενο (αλλαγή και σχέσεις, χώρος και σχήμα, ποσότητα, αβεβαιότητα και δεδομένα), καθώς και τα πλαίσια εφαρμογής των προβλημάτων (προσωπικό, επαγγελματικό, κοινωνικό, επιστημονικό). Εξετάζεται επίσης η σύνδεση με τις δεξιότητες του 21ου αιώνα και παρουσιάζονται τα επίπεδα μαθηματικής επάρκειας που ορίζει το PISA.

[1] Για λόγους απλοποίησης του κειμένου εφεξής, όπου δεν απαιτείται διαφοροποίηση λόγω φύλου, ο όρος «εκπαιδευτικός» αναφέρεται στους/στις εκπαιδευτικούς, ο όρος «διευθυντής» στους διευθυντές και στις διευθύντριες, ο όρος «καθηγητής» στους καθηγητές και στις καθηγήτριες, ο όρος «μαθητής» στους μαθητές και στις μαθήτριες.

Ακολουθεί η ενότητα με παραδείγματα θεμάτων, όπου παρατίθενται χαρακτηριστικές ερωτήσεις του PISA και αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο αυτές αξιολογούν τις γνώσεις και τις δεξιότητες των μαθητών.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 3, γίνεται αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων για την Ελλάδα, με έμφαση στις επιδόσεις των μαθητών διαχρονικά, στις αδυναμίες όσον αφορά το μαθηματικό περιεχόμενο και τις διεργασίες συλλογισμού, καθώς και στους παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση, όπως το κοινωνικο-οικονομικό υπόβαθρο, οι διαφορές φύλου και οι στάσεις απέναντι στα Μαθηματικά.

Εν συνεχεία, στο κεφάλαιο 4, περιλαμβάνονται συμπεράσματα και προτάσεις για τη διδακτική πράξη, όπου συνοψίζονται τα βασικά σημεία και προτείνονται στρατηγικές για την ενίσχυση της μαθηματικής εκπαίδευσης και την καλλιέργεια του μαθηματικού εγγραμματισμού των μαθητών.

Τέλος, στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται συγκεκριμένα ψηφιακά εργαλεία, τα οποία έχουν αναπτυχθεί με χρηματοδότηση του Υπουργείου Παιδείας και τα οποία μπορούν να αξιοποιηθούν σε μια διδασκαλία που καλλιεργεί τον μαθηματικό εγγραμματισμό.

Κεφάλαιο 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ στο PISA

1.1 Τι είναι το PISA;

Το **PISA – Programme for International Student Assessment** –, το οποίο αποδίδεται στα Ελληνικά ως **Διεθνές Πρόγραμμα για την Αξιολόγηση των Μαθητών**, είναι η ευρύτερη διεθνής έρευνα στον χώρο της εκπαίδευσης.

Ξεκίνησε το 2000 και συνεχίστηκε σε τριετείς κύκλους έως και το 2025. Ο επόμενος κύκλος θα διεξαχθεί το 2029, διευρυμένος κατά ένα έτος. Έτσι, εφεξής θα πραγματοποιείται κάθε τέσσερα χρόνια. Η έρευνα υλοποιείται υπό την αιγίδα του ΟΟΣΑ και ένα consortium ερευνητικών ιδρυμάτων και οργανισμών από διάφορες χώρες του κόσμου. Σε κάθε συμμετέχουσα χώρα υπάρχει ένα Εθνικό Κέντρο, το οποίο είναι υπεύθυνο για την υλοποίηση της έρευνας. Στην Ελλάδα την ευθύνη για τη διεξαγωγή της έρευνας είχε το ΚΕΕ (Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας) από το 2000 έως το 2011, και στη συνέχεια τον ρόλο αυτόν ανέλαβε το ΙΕΠ (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής).

Στην έρευνα λαμβάνουν μέρος χώρες του ΟΟΣΑ και πολλές ακόμα χώρες/οικονομίες από όλον τον κόσμο. Σε κάθε κύκλο της έρευνας προστίθενται νέες χώρες/οικονομίες καθιστώντας την έρευνα μία πολύτιμη πηγή για την παροχή έγκυρων και αξιόπιστων διεθνών συγκρίσιμων στοιχείων.

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι στο **PISA 2009** συμμετείχαν 65 χώρες/οικονομίες, ενώ στο **PISA 2022** (πρόκειται για τα τελευταία διαθέσιμα αποτελέσματα) πήραν μέρος 81 χώρες/οικονομίες με 690.000 δεκαπεντάχρονους μαθητές, που εκπροσωπούν περίπου 29.000.000 συνομηλίκων τους από τις χώρες αυτές.

Στην κύρια έρευνα του **PISA 2022,** την Ελλάδα εκπροσώπησαν **6578** μαθητές γεννημένοι το 2006 (15 χρονών), από **242 σχολεία** δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Γυμνάσια, Γενικά Λύκεια και ΕΠΑΛ) όλης της χώρας.



Εικόνα 1: Γεωγραφική κάλυψη – PISA 2022
*(Με **γκρι** χρώμα οι χώρες/οικονομίες-μέλη του ΟΟΣΑ, με **μπλε** χρώμα οι συνεργαζόμενες χώρες)*

1.2 Κύκλοι και φάσεις του PISA

Κάθε κύκλος του PISA υλοποιείται σε τρεις φάσεις. Σε κάθε φάση αξιολογούνται και τα τρία βασικά γνωστικά αντικείμενα, οι τρεις εγγραμματισμοί: στην **Κατανόηση Κειμένου**, στα **Μαθηματικά** και στις **Φυσικές Επιστήμες**. Όμως, ένα από αυτά τα γνωστικά αντικείμενα ή ένας από τους τρεις εγγραμματισμούς, θεωρείται κάθε φορά το κύριο αντικείμενο της έρευνας, αυτό, δηλαδή, από το οποίο προέρχεται το μεγαλύτερο ποσοστό των ερωτήσεων.

Επίσης, συχνά εμφανίζεται, σε μια *ad hoc* βάση, και ένα τέταρτο γνωστικό αντικείμενο, το οποίο αξιολογείται μόνο μία φορά. Για παράδειγμα, το 2019 οι μαθητές αξιολογήθηκαν σε ένα νέο πεδίο, «Γνώσεις και Δεξιότητες του Πολίτη του Κόσμου», όπου διερευνήθηκαν οι γνώσεις τους σε παγκόσμια ζητήματα, όπως για παράδειγμα οι επιπτώσεις της ατμοσφαιρικής ρύπανσης στην καθημερινότητα των ανθρώπων, οι επιπτώσεις της μαζικής παραγωγής ρούχων, καθώς και οι δεξιότητες που απαιτούνται για τη ζωή σε πολυπολιτισμικές κοινωνίες.

Στον Πίνακα 1, που ακολουθεί, βλέπουμε τους κύκλους και τις φάσεις του PISA από την αρχή της εφαρμογής του, το 2000. Σε κάθε φάση, με το πορτοκαλί χρώμα εμφανίζεται το κύριο αντικείμενο, αυτό στο οποίο δίνεται κάθε φορά έμφαση.

1ος Κύκλος	2000	Κατανόηση Κειμένου			
	2003	Κατανόηση Κειμένου	Μαθηματικά	Φυσικές Επιστήμες	Επίλυση Προβλήματος
	2006	Κατανόηση Κειμένου	Μαθηματικά	Φυσικές Επιστήμες	
2ος κύκλος	2009	Κατανόηση Κειμένου	Μαθηματικά	Φυσικές Επιστήμες	
	2012	Κατανόηση Κειμένου	Μαθηματικά	Φυσικές Επιστήμες	
	2015	Κατανόηση Κειμένου	Μαθηματικά	Φυσικές Επιστήμες	Συνεργατική Επίλυση Προβλήματος
3ος κύκλος	2018	Κατανόηση Κειμένου	Μαθηματικά	Φυσικές Επιστήμες	Γνώσεις και Δεξιότητες του Πολίτη του Κόσμου
	2022	Κατανόηση Κειμένου	Μαθηματικά	Φυσικές Επιστήμες	Δημιουργική Σκέψη
	2025	Κατανόηση Κειμένου	Μαθηματικά	Φυσικές Επιστήμες	• Μαθαίνοντας για έναν ψηφιακό κόσμο • Η αξιολόγηση στην Ξένη Γλώσσα - Αγγλικά

Πίνακας 1: Τα κύρια αντικείμενα ανά φάση και κύκλο της έρευνας PISA (2000-2022)

Η Ελλάδα έχει λάβει μέρος σε όλες τις εφαρμογές της έρευνας, από το 2000. Για όλες τις φάσεις έχουν συλλεγεί έγκυρα και αξιόπιστα δεδομένα, τα οποία περιλαμβάνονται στις επίσημες δημοσιεύσεις του ΟΟΣΑ για τα αποτελέσματα του PISA.

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 1, το αντικείμενο των Μαθηματικών έχει αποτελέσει κύριο αντικείμενο μέχρι σήμερα τρεις φορές, το 2003, το 2012, και το 2022. Θα αποτελέσει δε αντικείμενο εστίασης και στον επόμενο κύκλο του 2033.

1.3 Ποιος είναι ο στόχος του PISA

Κύριος στόχος του προγράμματος PISA είναι η αξιολόγηση των μαθητών που βρίσκονται στο τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης[2] σε γνώσεις και δεξιότητες, οι οποίες αποτελούν

[2] Στις περισσότερες χώρες μέλη του ΟΟΣΑ, το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης συμπίπτει με το τέλος της κατώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, το οποίο στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα συμπίπτει με το τέλος του Γυμνασίου. Ωστόσο το κριτήριο συμμετοχής των μαθητών στην έρευνα PISA δεν είναι η φοίτησή τους σε συγκεκριμένη τάξη αλλά η ηλικία τους, το να είναι δηλαδή 15 χρονών ανεξάρτητα από την τάξη στην οποία

σε μεγάλο βαθμό προϋπόθεση για την ουσιαστική και ισότιμη συμμετοχή τους στις σύγχρονες κοινωνίες. Με άλλα λόγια, οι εν λόγω γνώσεις και δεξιότητες προσδιορίζουν στις σημερινές συνθήκες εάν ένας μαθητής στο τέλος της υποχρεωτικής του εκπαίδευσης είναι **λειτουργικά εγγράμματος** ή μη.

Ξεκινώντας από ένα κοινά καθορισμένο θεωρητικό πλαίσιο, εξειδικευμένο για κάθε γνωστικό αντικείμενο της αξιολόγησης, το πρόγραμμα PISA συλλέγει πληροφορίες για τις γνώσεις και δεξιότητες των 15χρονων μαθητών, συνολικά ανά χώρα κ**αι όχι ατομικά**, στα γνωστικά αντικείμενα της Κατανόησης Κειμένου, των Μαθηματικών, των Φυσικών Επιστημών (καθώς όπως ήδη αναφέρθηκε και ενός πρόσθετου γνωστικού αντικειμένου σε συγκεκριμένες εφαρμογές της έρευνας), ενώ παράλληλα μέσω ερωτηματολογίων προς τους/τις μαθητές και τους/τις διευθυντές/τριες των σχολείων συλλέγει στοιχεία τα οποία αξιοποιεί προκειμένου να ερμηνεύσει την επίδραση διαφόρων ατομικών και σχολικών παραγόντων στις επιδόσεις των μαθητών. Με τον τρόπο αυτόν αξιολογείται ο βαθμός στον οποίο το κάθε εκπαιδευτικό σύστημα στο τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης έχει επιτύχει να εφοδιάσει τους μαθητές με κρίσιμες και χρήσιμες δεξιότητες για τη ζωή, προωθώντας παράλληλα την κοινωνική δικαιοσύνη αφού παράλληλα αξιολογείται ο βαθμός που το κάθε σύστημα καταφέρνει να μειώσει τα χάσματα ανάμεσα σε επιμέρους ομάδες μαθητών (αγόρια – κορίτσια, μαθητές από διαφορετικά κοινωνικο-οικονομικά περιβάλλοντα, μετανάστες – γηγενείς μαθητές, μαθητές από αγροτικές ή αστικές περιοχές, κλπ.).

Έτσι, κάθε συμμετέχουσα χώρα έχει τη δυνατότητα να αντλεί από το PISA χρήσιμα στοιχεία για το εκπαιδευτικό της σύστημα, να κατανοεί τα θετικά στοιχεία και τις αδυναμίες του εκπαιδευτικού της σχεδιασμού και, εντέλει, να ανατροφοδοτείται σχετικά με τον βαθμό αποτελεσματικότητας του εκπαιδευτικού έργου, μελετώντας ταυτόχρονα καλές εκπαιδευτικές πρακτικές των άλλων συμμετεχουσών χωρών. Η περιοδική δε επανάληψη της έρευνας παρέχει τη δυνατότητα να αντλούνται συμπεράσματα σχετικά με τη **διαχρονική εξέλιξη** των επιμέρους εκπαιδευτικών συστημάτων.

Επίσης, το PISA, όπως ήδη αναφέρθηκε, προσφέρει τη δυνατότητα συσχετίσεων ανάμεσα στις επιδόσεις των μαθητών στα γνωστικά αντικείμενα και στους δείκτες που συγκροτεί το PISA. Οι δείκτες προέρχονται από τα ερωτηματολόγια που συνοδεύουν το γνωστικό τεστ και

φοιτούν. Βέβαια, στην Ελλάδα η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών αυτής της ηλικίας φοιτά στην Α’ Λυκείου και δευτερευόντως στη Γ΄ Γυμνασίου.

οι τιμές τους διαμορφώνονται ανάλογα με τις απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις. Έτσι, για παράδειγμα, τα δεδομένα του PISA μάς πληροφορούν για τη διαφορά στις επιδόσεις μεταξύ γηγενών μαθητών και μαθητών με μεταναστευτικό υπόβαθρο, μεταξύ αγοριών και κοριτσιών, για την επίδραση του κοινωνικο-οικονομικού και πολιτισμικού υπόβαθρου της οικογένειας, αλλά και πολλών άλλων παραγόντων στις επιδόσεις των μαθητών.

Επίσης, οι διευθυντές των σχολείων του δείγματος συμπληρώνουν και αυτοί ένα ερωτηματολόγιο το οποίο συλλέγει πληροφορίες σχετικά με την οργάνωση του σχολείου, τα βασικά χαρακτηριστικά του και τις παιδαγωγικές πρακτικές που εφαρμόζονται σε αυτό. Το PISA προτείνει επίσης ερωτηματολόγια για τους εκπαιδευτικούς των σχολείων του δείγματος, καθώς και για τους γονείς των μαθητών που παίρνουν μέρος στην έρευνα, αλλά η Ελλάδα δεν συμμετέχει σε αυτά τα δύο προαιρετικά ερωτηματολόγια.

1.4 Μεθοδολογία της έρευνας

Η διεξαγωγή της έρευνας βασίζεται σε ένα σύνολο ερωτήσεων που καλούνται να απαντήσουν (ανώνυμα) 15χρονοι μαθητές. Οι ερωτήσεις μοιράζονται σε δύο σκέλη: το πρώτο αφορά τα τρία γνωστικά αντικείμενα (Κατανόηση Κειμένου, Μαθηματικά και Φυσικές Επιστήμες) και το δεύτερο αφορά το σχολικό – οικογενειακό – κοινωνικό προφίλ των μαθητών. Η συμμετοχή των μαθητών γίνεται μέσω ηλεκτρονικών υπολογιστών που διαθέτει το σχολείο τους, καθώς τα σχετικά ερωτηματολόγια τους παρέχονται σε ψηφιακό-διαδικτυακό περιβάλλον, μέσω ειδικών κωδικών.

Στο σκέλος της αξιολόγησης των τριών γνωστικών αντικειμένων (γνωστικό τεστ), οι μαθητές του δείγματος απαντούν σε ερωτήσεις ανοικτού και κλειστού τύπου, οι οποίες βασίζονται σε ένα ή περισσότερα εισαγωγικά κείμενα (εν συνεχεία παρουσιάζονται πολλά παραδείγματα σχετικών ερωτήσεων). Η συνολική διάρκεια του γνωστικού αυτού μέρους της έρευνας είναι δύο ώρες και οι ερωτήσεις αφορούν όλα τα αξιολογούμενα γνωστικά αντικείμενα, με έμφαση στο κύριο αντικείμενο για τη συγκεκριμένη χρονιά. Από το PISA 2018 και μετά αξιοποιείται η τεχνική της προσαρμοσμένης αξιολόγησης (adaptive testing design) για κάθε μαθητή. Σύμφωνα με αυτή την τεχνική, κάθε μαθητής καλείται να απαντήσει σε διαφορετικό «πακέτο» ερωτήσεων ανάλογα με το επίπεδο των ικανοτήτων του. Έτσι το τεστ ξεκινάει για όλους τους μαθητές με μεσαίας δυσκολίας ερωτήσεις και, ανάλογα με το πώς

ανταποκρίνονται σε αυτές οι μαθητές, συνεχίζει με πιο εύκολες ή πιο δύσκολες ερωτήσεις. Με βάση ειδικά στατιστικά μοντέλα και τεχνικές οι τελικές επιδόσεις των μαθητών είναι τελικά συγκρίσιμες, ακόμα και αν αυτοί απάντησαν διαφορετικές ερωτήσεις.[3]

Στη συνέχεια, οι μαθητές απαντούν σε ερωτηματολόγια με ερωτήσεις σχετικά με την οικογένεια και τις οικιακές τους συνήθειες, τις μαθησιακές τους συνήθειες, τις στάσεις τους απέναντι στο κύριο αντικείμενο της αξιολόγησης, καθώς και τη συμμετοχή τους στην εκπαιδευτική διαδικασία και τα κίνητρά τους για τη μάθηση. Αυτά τα ερωτηματολόγια είναι, φυσικά, ίδια για όλους τους μαθητές.

Ένα αντίστοιχο ερωτηματολόγιο συμπληρώνουν και οι διευθυντές των σχολείων του δείγματος με ερωτήσεις που αφορούν – μεταξύ άλλων – το μέγεθος και τον τύπο του σχολείου, την πολιτική υποδοχής και κατάταξης των μαθητών, τις διοικητικές δομές, τις συγκεκριμένες παιδαγωγικές πρακτικές που εφαρμόζονται στο σχολείο, καθώς και τους οικονομικούς και εκπαιδευτικούς πόρους που διαθέτει το σχολείο.

Όλες οι ερωτήσεις, και στα δύο σκέλη, είναι μεταφρασμένες στη γλώσσα κάθε χώρας. Η μετάφραση γίνεται με συνεργασία ανάμεσα στον κεντρικό (διεθνή) φορέα PISA και στο Εθνικό κέντρο κάθε συμμετέχουσας χώρας, μέσα από μια διαδικασία αλλεπάλληλων παρατηρήσεων/διορθώσεων και με ιδιαίτερη μέριμνα για την ορθή απόδοση νοημάτων και όρων σε κάθε γλώσσα, ώστε να αποφεύγεται οποιαδήποτε παρανόηση σε οποιονδήποτε όρο, λόγω ειδικών σημασιολογικών φορτίων των λέξεων ανά γλώσσα, αλλά και οποιαδήποτε διαφορά στην πρόσληψη των νοημάτων λόγω πολιτισμικής ταυτότητας. Αυτονόητα, είναι εξασφαλισμένο ότι οι ερωτήσεις στα γνωστικά αντικείμενα βασίζονται σε ύλη που έχουν διδαχτεί οι μαθητές σε όλες τις χώρες.

Σε κάθε φάση του PISA, η ανωτέρω διαδικασία επαναλαμβάνεται δύο φορές: κατά την Πιλοτική εφαρμογή της έρευνας (Field trial), της οποίας ο στόχος είναι να δοκιμαστούν τα εργαλεία της έρευνας χωρίς να ανακοινώνονται αποτελέσματα, και την Κύρια Έρευνα (Main

[3] Η αναφορά στις εν λόγω στατιστικές διαδικασίες και τεχνικές εκφεύγει του σκοπού του παρόντος οδηγού. Ωστόσο οι ενδιαφερόμενοι μπορούν να ανατρέξουν στα Τεχνικά Εγχειρίδια της Έρευνας (PISA Technical Reports) τα οποία βρίσκονται αναρτημένα στην ιστοσελίδα του προγράμματος (https://www.oecd.org/en/about/programmes/pisa.html)

Study). Τα σχολεία τα οποία συμμετέχουν στην Κύρια Έρευνα είναι **αντιπροσωπευτικά του συνόλου των σχολείων της χώρας στα οποία φοιτούν 15χρονοι μαθητές**.

Η επιλογή των σχολείων γίνεται κεντρικά από την επιτελική ομάδα PISA σε επίπεδο ΟΟΣΑ, με κριτήριο να αντιπροσωπεύεται σωστά η γεωγραφική κατανομή και η κοινωνική διαστρωμάτωση του μαθητικού πληθυσμού κάθε χώρας. Σε κάθε σχολείο του δείγματος συμμετέχουν όλοι οι 15χρονοι μαθητές, εκτός αν υπερβαίνουν τους 57. Σε αυτήν την περίπτωση επιλέγονται τυχαία (μέσω αλγορίθμου) οι 57 δεκαπεντάχρονοι μαθητές που θα συμμετάσχουν στην έρευνα.

Η αξιολόγηση των απαντήσεων που δίνουν οι μαθητές στο γνωστικό σκέλος του τεστ γίνεται με δύο τρόπους: στις μεν ερωτήσεις κλειστού τύπου γίνεται αυτόματα, από την πλατφόρμα PISA, κεντρικά, από τον διεθνή φορέα δηλαδή, χωρίς μεσολάβηση του κάθε εθνικού φορέα PISA. Στις δε ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, η αξιολόγηση γίνεται από πιστοποιημένους βαθμολογητές σε κάθε εθνικό φορέα. Οι βαθμολογητές σε αυτήν την κατηγορία ερωτήσεων προβαίνουν στις αξιολογήσεις τους βάσει ειδικού οδηγού βαθμολόγησης, που εκδίδεται από τον διεθνή φορέα PISA και επικαιροποιείται με βάση την εμπειρία και τις αναφορές/παρατηρήσεις των βαθμολογητών στους εθνικούς φορείς PISA. Ο οδηγός βαθμολόγησης περιλαμβάνει τα κριτήρια ώστε μια απάντηση σε ερώτηση ανοικτού τύπου να αξιολογηθεί ως «Αποδεκτή» (εφόσον πληροί όλα τα κριτήρια) ή «Μη αποδεκτή» (εφόσον δεν πληροί τα κριτήρια). Σε ορισμένες περιπτώσεις υπάρχει και η επιλογή «Μερικώς αποδεκτή» (εφόσον η απάντηση περιλαμβάνει ορισμένα αποδεκτά στοιχεία, αλλά δεν είναι πλήρης).

Κάθε ερώτηση αξιολογείται ταυτόχρονα από πολλαπλούς βαθμολογητές και, προκειμένου να καταχωριστεί η αξιολόγηση της κάθε ερώτησης στην ψηφιακή πλατφόρμα, θα πρέπει να υπάρχει σύγκλιση ανάμεσα στις αξιολογήσεις των επιμέρους βαθμολογητών σε ποσοστά που μεσοσταθμικά ορίζονται στο 90%.

Κεφάλαιο 2: Το πλαίσιο αξιολόγησης του PISA για τα Μαθηματικά

2.1 Η έννοια του μαθηματικού εγγραμματισμού

Ποιες είναι οι απαραίτητες γνώσεις και δεξιότητες που χρειάζεται να διαθέτει ένας σύγχρονος πολίτης, ώστε να μπορεί να ανταποκριθεί σε καταστάσεις που απαιτούν τη χρήση Μαθηματικών; Τι ορίζεται ως μαθηματική ικανότητα για έναν 15χρονο μαθητή, ο οποίος βρίσκεται στο τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης ή προετοιμάζεται για πιο εξειδικευμένη εκπαίδευση;

Όπως ήδη αναφέρθηκε, ο μαθηματικός εγγραμματισμός αποτέλεσε το κύριο αντικείμενο αξιολόγησης στο PISA σε τρεις διαφορετικές χρονιές: το 2003, το 2012 και το 2022. Η τελευταία αναθεώρηση του ορισμού του μαθηματικού εγγραμματισμού πραγματοποιήθηκε για το PISA 2022, παραμένει αμετάβλητη για το PISA 2025, και αναφέρει ότι:

«Ο μαθηματικός εγγραμματισμός είναι η ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί μαθηματικό συλλογισμό και να διατυπώνει, να εφαρμόζει και να ερμηνεύει τις μαθηματικές γνώσεις για την επίλυση προβλημάτων σε μια ποικιλία καταστάσεων του πραγματικού κόσμου. Περιλαμβάνει έννοιες, διαδικασίες, γεγονότα και εργαλεία για την περιγραφή, εξήγηση και πρόβλεψη φαινομένων. Βοηθά τα άτομα να αναγνωρίζουν τον ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στον κόσμο, ώστε να προβαίνουν σε καλά τεκμηριωμένες κρίσεις και αποφάσεις οι οποίες είναι απαραίτητες σε δημιουργικούς, ενεργούς και σκεπτόμενους πολίτες του 21ου αιώνα» (OECD, 2023).

Ο παραπάνω ορισμός αναδεικνύει ότι ο μαθηματικός εγγραμματισμός δεν περιορίζεται στη γνώση μαθηματικών εννοιών, αλλά επεκτείνεται στην **ικανότητα αξιοποίησής τους σε ποικίλες καταστάσεις του πραγματικού κόσμου**. Για να αποτυπωθεί με σαφήνεια τι σημαίνει αυτό στην πράξη, το PISA έχει αναπτύξει ένα πλαίσιο αξιολόγησης το οποίο εξειδικεύει τις πτυχές, το περιεχόμενο και τα πλαίσια μέσα στα οποία οι μαθητές καλούνται να επιδείξουν τις μαθηματικές τους δεξιότητες. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται αναλυτικά αυτό το πλαίσιο, που αποτελεί τη βάση για τη δημιουργία και την κατηγοριοποίηση των θεμάτων της αξιολόγησης.

2.2 Πλαίσιο αξιολόγησης του μαθηματικού εγγραμματισμού στο PISA

Με βάση το πλαίσιο αξιολόγησης του PISA 2022 (OECD, 2023), για την αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματισμού το PISA εντοπίζει τρεις αλληλένδετες διαστάσεις:

- τον **μαθηματικό συλλογισμό** (παραγωγικό και επαγωγικό) και την **επίλυση προβλήματος** (η οποία περιλαμβάνει τις μαθηματικές διαδικασίες που περιγράφουν τι κάνουν τα άτομα για να συνδέσουν το πλαίσιο του προβλήματος με τα Μαθηματικά κι έτσι να λύσουν το πρόβλημα),
- το **μαθηματικό περιεχόμενο** που απαιτείται για την απάντηση στις ερωτήσεις αξιολόγησης,
- τα **πλαίσια** στα οποία διατυπώνονται οι ερωτήσεις αξιολόγησης σε συνδυασμό με επιλεγμένες δεξιότητες του 21ου αιώνα, που υποστηρίζουν τον μαθηματικό εγγραμματισμό αλλά και αναπτύσσονται μέσω αυτού.

Τα θέματα του PISA αποτελούνται από την περιγραφή μιας πραγματικής κατάστασης και από μία ή περισσότερες σχετικές ερωτήσεις. Δες τα παραδείγματα στην ενότητα 2.5

Ακολούθως αναλύεται καθεμία από τις ανωτέρω τρεις διαστάσεις.

2.2.1 Ο μαθηματικός συλλογισμός και η επίλυση προβλήματος

Ο **μαθηματικός συλλογισμός** (τόσο ο παραγωγικός όσο και ο επαγωγικός) περιλαμβάνει την αξιολόγηση καταστάσεων, την επιλογή στρατηγικών, την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων, την ανάπτυξη και περιγραφή λύσεων και την αναγνώριση του τρόπου με τον οποίο αυτές οι λύσεις μπορούν να εφαρμοστούν.

Οι μαθητές συλλογίζονται μαθηματικά όταν:

- ταυτοποιούν, αναγνωρίζουν, οργανώνουν, συνδέουν και αναπαριστούν,
- κατασκευάζουν, συνοψίζουν, αξιολογούν, συμπεραίνουν, δικαιολογούν, εξηγούν και υπερασπίζονται λύσεις,
- ερμηνεύουν, διατυπώνουν κρίσεις, ασκούν κριτική, αντικρούουν και αξιολογούν κρίσεις.

Ο μαθηματικός συλλογισμός (τόσο ο παραγωγικός όσο και ο επαγωγικός), που καθίσταται δυνατός χάρη σε ορισμένες βασικές κατανοήσεις που επιδιώκονται (ή αναμένεται να επιδιώκονται) μέσα από τα σχολικά Μαθηματικά, αποτελεί τον πυρήνα του μαθηματικού εγγραμματισμού. Μεταξύ αυτών των βασικών κατανοήσεων περιλαμβάνονται:

- η κατανόηση της ποσότητας, των αριθμητικών συστημάτων και των αλγεβρικών τους ιδιοτήτων,
- η εκτίμηση της δύναμης που ενέχει η μαθηματική αφαίρεση και η συμβολική αναπαράσταση,
- η αντίληψη των μαθηματικών δομών και των κανονικοτήτων τους,
- η αναγνώριση των συναρτησιακών σχέσεων (σχέσεων εξάρτησης) μεταξύ των ποσοτήτων,
- η χρήση της μαθηματικής μοντελοποίησης ως φακού για την ερμηνεία του πραγματικού κόσμου (π.χ. στις φυσικές, βιολογικές, κοινωνικές, οικονομικές και συμπεριφορικές επιστήμες),
- η κατανόηση της μεταβλητότητας ως πυρήνα της στατιστικής.

Ο μαθηματικός εγγραμματισμός αναφέρεται στην ικανότητα ενός ατόμου να **διατυπώνει**, να **εφαρμόζει** και να **ερμηνεύει (και να αξιολογεί)** τα Μαθηματικά. Αυτές οι τρεις μαθηματικές διεργασίες περιγράφουν τι κάνουν τα άτομα για να συνδέσουν το πλαίσιο ενός προβλήματος με τα Μαθηματικά και να λύσουν το πρόβλημα. Γι' αυτό, μαζί με τον μαθηματικό συλλογισμό, παρέχουν μια χρήσιμη και ουσιαστική δομή για τον χαρακτηρισμό των θεμάτων του PISA. Δηλαδή, τα θέματα στο τεστ μαθηματικών του PISA χαρακτηρίζονται ως σχετιζόμενα με ένα από τα παρακάτω:

Ενδεικτικά, από τα παραδείγματα της ενότητας 2.5, απαιτούνται οι εξής διεργασίες:

- ο συλλογισμός στην ερώτηση 3 του 2.5.2
- η διατύπωση στην ερώτηση 2 του 2.5.2
- η εφαρμογή στην ερώτηση 1 του 2.5.2
- η ερμηνεία στην ερώτηση 2 του 2.5.4

- μαθηματικός συλλογισμός,
- διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά,
- εφαρμογή και χρήση μαθηματικών εννοιών, γεγονότων και διαδικασιών,
- ερμηνεία, εφαρμογή και αξιολόγηση των μαθηματικών αποτελεσμάτων.

2.2.2 Το μαθηματικό περιεχόμενο

Η κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου – και η ικανότητα εφαρμογής αυτής της γνώσης στην επίλυση ουσιαστικών προβλημάτων σε ρεαλιστικά πλαίσια – είναι σημαντική για τους πολίτες στον σύγχρονο κόσμο. Δηλαδή, για να συλλογιστούμε μαθηματικά, να λύσουμε προβλήματα και να ερμηνεύσουμε καταστάσεις σε προσωπικό, επαγγελματικό, κοινωνικό και επιστημονικό πλαίσιο, υπάρχει ανάγκη να αξιοποιήσουμε ορισμένες μαθηματικές γνώσεις και κατανοήσεις.

Οι ακόλουθες κατηγορίες περιεχομένου συμπεριλαμβάνουν τόσο τα μαθηματικά φαινόμενα που αποτελούν τη βάση των προβλημάτων, όσο και τα περιεχόμενα των τυπικών σχολικών προγραμμάτων σπουδών. Επιπλέον, αντικατοπτρίζουν το μαθηματικό περιεχόμενο που είναι κεντρικό στην επιστήμη. Αυτές οι τέσσερις κατηγορίες χρησιμοποιούνται στα ερωτήματα του τεστ για το PISA:

Ενδεικτικά, το περιεχόμενο κάποιων από τα παραδείγματα της ενότητας 2.5, είναι:

- αλλαγή και σχέσεις οι ερωτήσεις 2 και 3 του 2.5.2
- χώρος και σχήμα το 2.5.8
- ποσότητα το 2.5.1
- αβεβαιότητα και δεδομένα το 2.5.5 και το 2.5.6

- **αλλαγή και σχέσεις** (π.χ. σχέσεις μεταξύ μεγεθών, μεταβολή, συναρτήσεις και εξισώσεις),
- **χώρος και σχήμα** (π.χ. οπτικοποίηση, μέτρηση, ιδιότητες σχημάτων, θέσεις και προσανατολισμοί),
- **ποσότητα** (π.χ. ποσοτικοποίηση ιδιοτήτων, αριθμοί, υπολογισμοί),
- **αβεβαιότητα και δεδομένα** (π.χ. αναπαράσταση και ερμηνεία δεδομένων, στατιστική, πιθανότητα ενδεχομένου, δεσμευμένη πιθανότητα).

2.2.3 Τα πλαίσια και οι δεξιότητες του 21ου αιώνα

Ο ορισμός του μαθηματικού εγγραμματισμού από το PISA εισάγει δύο σημαντικές παραμέτρους για τα θέματα (τις ερωτήσεις αξιολόγησης) του PISA. Πρώτον, ο μαθηματικός εγγραμματισμός λαμβάνει χώρα σε πραγματικά πλαίσια. Δεύτερον, ο μαθηματικός εγγραμματισμός βοηθά τα άτομα να αναγνωρίζουν τον ρόλο που διαδραματίζουν τα Μαθηματικά στον κόσμο, προκειμένου να λαμβάνουν τις τεκμηριωμένες κρίσεις και

αποφάσεις που απαιτούνται από δημιουργικούς, ενεργούς και σκεπτόμενους πολίτες του 21ου αιώνα.

Το πλαίσιο είναι η πτυχή του κόσμου ενός ατόμου στην οποία τοποθετείται το πρόβλημα. Η επιλογή των κατάλληλων μαθηματικών στρατηγικών και αναπαραστάσεων συχνά εξαρτάται από το πλαίσιο στο οποίο προκύπτει ή τίθεται το πρόβλημα. Γι' αυτό, υπάρχει η ανάγκη αξιοποίησης της γνώσης του πραγματικού κόσμου στην ανάπτυξη του μοντέλου.

Για τις ανάγκες της αξιολόγησης, το PISA χρησιμοποιεί θέματα και ερωτήσεις που έχουν αναπτυχθεί στα εξής τέσσερα πλαίσια:

- **προσωπικό** (που εστιάζει σε δραστηριότητες του ατόμου, της οικογένειάς του ή της ομάδας ομοτίμων του),
- **επαγγελματικό** (που αναφέρεται στον κόσμο της εργασίας),
- **κοινωνικό** (που εστιάζει σε τοπικά, εθνικά ή παγκόσμια θέματα κοινωνικού ενδιαφέροντος),
- **επιστημονικό** (που σχετίζεται με την εφαρμογή των μαθηματικών στις άλλες επιστήμες).

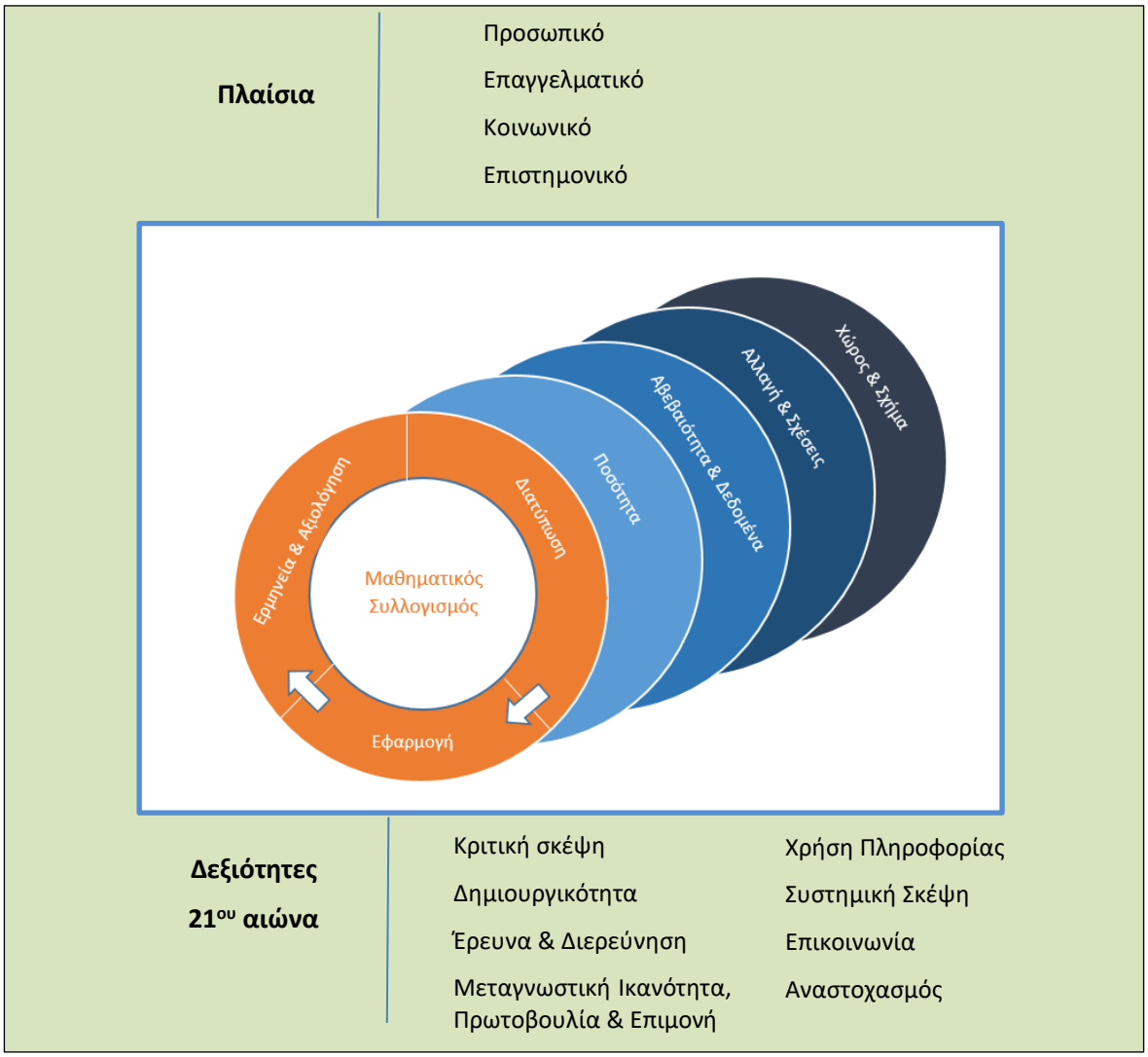
Από τα παραδείγματα της 2.5, το 2.5.3, έχει αναπτυχθεί στο προσωπικό πλαίσιο, το 2.5.4 στο επαγγελματικό, το 2.5.6 στο κοινωνικό και το 2.5.1, στο επιστημονικό

Από την άλλη μεριά, τα τελευταία χρόνια υπάρχει αυξημένο ενδιαφέρον παγκοσμίως για τις λεγόμενες δεξιότητες του 21ου αιώνα και την πιθανή ένταξή τους στα εκπαιδευτικά συστήματα. Τα Μαθηματικά – όπως και τα άλλα μαθησιακά αντικείμενα – συνδέονται με συγκεκριμένους τρόπους με την καλλιέργεια αυτών των δεξιοτήτων. Για παράδειγμα, γίνεται ολοένα και πιο σημαντικό τα παιδιά να διδάσκονται στο σχολείο πώς να διατυπώνουν λογικά επιχειρήματα με κατάλληλη αιτιολόγηση. Τα επιχειρήματα που προβάλλουν θα πρέπει να είναι μαθηματικά αυστηρά, να βασίζονται σε ισχυρή θεωρία και να αντέχουν στην κριτική. Η μάθηση των Μαθηματικών, με τη σαφήνεια και την ισχυρή έμφαση στον λογικό συλλογισμό και την αυστηρότητα στο κατάλληλο επίπεδο, αποτελεί μια πολύ καλή ευκαιρία για ανάπτυξη της ικανότητας για αυτό το είδος επιχειρηματολογίας.

Αναζητώντας την τομή μεταξύ των γενικών δεξιοτήτων του 21ου αιώνα και των εξειδικευμένων δεξιοτήτων που σχετίζονται με τα Μαθηματικά, το PISA συμπεριλαμβάνει στο πλαίσιο αξιολόγησης τις ακόλουθες οκτώ δεξιότητες:

- κριτική σκέψη,
- δημιουργικότητα,
- έρευνα και διερεύνηση,
- μεταγνωστική ικανότητα, πρωτοβουλία και επιμονή,
- χρήση πληροφορίας,
- συστημική σκέψη,
- επικοινωνία,
- αναστοχασμό.

Στην εικόνα 2 αναπαρίσταται το συνολικό πλαίσιο αξιολόγησης για τα Μαθηματικά, όπως αυτό προσδιορίστηκε στο πλαίσιο της έρευνας PISA 2022 και περιγράφηκε στις προηγούμενες ενότητες.



Εικόνα 2: Πλαίσιο PISA 2022 για τα Μαθηματικά

2.3 Η εφαρμογή του πλαισίου αξιολόγησης στα θέματα του PISA

Τα θέματα του PISA είναι περίπου εξίσου κατανεμημένα ανάμεσα στις τέσσερις πτυχές του μαθηματικού συλλογισμού και της επίλυσης προβλήματος, δηλαδή:

- τον μαθηματικό συλλογισμό,
- τη διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά,
- την εφαρμογή και χρήση μαθηματικών εννοιών, γεγονότων και διαδικασιών, και
- την ερμηνεία, εφαρμογή και αξιολόγηση των μαθηματικών αποτελεσμάτων.

Ομοίως, τα θέματα είναι περίπου εξίσου κατανεμημένα ανάμεσα στις τέσσερις κατηγορίες του μαθηματικού περιεχομένου, δηλαδή:

- την αλλαγή και σχέσεις,
- τον χώρο και το σχήμα,
- την ποσότητα, και
- την αβεβαιότητα και τα δεδομένα.

Η έρευνα του PISA για τον μαθηματικό εγγραμματισμό περιλαμβάνει ερωτήσεις από ένα ευρύ φάσμα δυσκολιών, που αντιστοιχούν στο εύρος των ικανοτήτων των 15χρονων μαθητών. Περιλαμβάνει ερωτήσεις που αποτελούν πρόκληση για τους πιο ικανούς μαθητές και ερωτήσεις που είναι κατάλληλες για τους λιγότερο ικανούς μαθητές. Επιπλέον, το επίπεδο αναγνωστικής ικανότητας (κατανόησης κειμένου) που απαιτείται για την επιτυχή ενασχόληση με ένα θέμα λαμβάνεται υπόψη πολύ προσεκτικά κατά την ανάπτυξη και την επιλογή θεμάτων. Επιδιώκεται η διατύπωση των θεμάτων να είναι όσο το δυνατόν πιο απλή και άμεση. Λαμβάνεται επίσης μέριμνα ώστε να αποφεύγονται πλαίσια που θα μπορούσαν να δημιουργήσουν πολιτισμικές προκαταλήψεις, ενώ όλα τα θέματα ελέγχονται από όλα τα Εθνικά Κέντρα των συμμετεχουσών χωρών. Τα θέματα μεταφράζονται σε πολλές γλώσσες με μεγάλη προσοχή.

Η αξιοποίηση του ηλεκτρονικού υπολογιστή στην αξιολόγηση των Μαθηματικών στο PISA παρέχει δύο σημαντικές δυνατότητες. Αφενός, επιτρέπει την ανάπτυξη θεμάτων διαδραστικών, για παράδειγμα με την ενσωμάτωση προσομοιώσεων και λογιστικών φύλλων. Αυτά τα χαρακτηριστικά κάνουν τα θέματα πιο ελκυστικά για τα παιδιά και συμβάλλουν στο να φέρουν την εξέταση του PISA στην πραγματικότητα και τις απαιτήσεις του 21ου αιώνα. Αφετέρου, η δυνατότητα προσαρμοστικής αξιολόγησης των Μαθηματικών

μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή παρέχει την ευκαιρία να περιγραφεί καλύτερα τι είναι σε θέση να κάνουν οι μαθητές και στα δύο άκρα του φάσματος απόδοσης. Όσο προχωράει το τεστ, στα παιδιά παρέχονται ολοένα και περισσότερο εξατομικευμένοι συνδυασμοί θεμάτων, ανάλογα με τις απαντήσεις και τις βαθμολογίες στα προηγούμενα θέματα. Έτσι, δημιουργούνται λεπτομερείς πληροφορίες σχετικά με τα χαρακτηριστικά απόδοσης των μαθητών και στα δύο άκρα της κλίμακας απόδοσης.

Από τα θέματα της ενότητας 2.5 στο 2.5.3 χρησιμοποιείται προσομοίωση και στο 2.5.6 χρησιμοποιείται λογιστικό φύλλο.

Στα θέματα του PISA περιλαμβάνονται τρεις μορφές ερωτήσεων:

- **Ερωτήσεις ανοιχτής απάντησης**, όπου οι εξεταζόμενοι αναπτύσσουν την απάντησή τους περιγράφοντας τα βήματα που ακολούθησαν ή εξηγώντας πώς κατέληξαν στη συγκεκριμένη απάντηση. Η κωδικοποίηση αυτών των απαντήσεων γίνεται από ειδικούς βαθμολογητές.
- **Ερωτήσεις σύντομης απάντησης** (κλειστής μορφής), όπου τα παιδιά καλούνται να γράψουν μια απάντηση συγκεκριμένου τύπου (συνήθως έναν αριθμό). Η κωδικοποίηση αυτών των απαντήσεων συνήθως είναι αυτόματη.
- **Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής**, όπου τα παιδιά καλούνται να επιλέξουν μία από τις διαθέσιμες απαντήσεις. Η κωδικοποίηση όλων αυτών των απαντήσεων είναι επίσης αυτόματη.

Όπως ήδη αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 1, η πλειονότητα των ερωτήσεων βαθμολογείται διχοτομικά (δηλαδή, οι απαντήσεις θεωρούνται είτε αποδεκτές είτε μη αποδεκτές). Ωστόσο, στα ερωτήματα ανοιχτής απάντησης μερικές φορές περιλαμβάνεται η κωδικοποίηση κάποιων απαντήσεων ως «μερικώς αποδεκτών». Η ύπαρξη περισσότερων κωδικών (αποδεκτές, μερικώς αποδεκτές, μη αποδεκτές) είναι χρήσιμη για να αντληθούν λεπτομερείς πληροφορίες, ιδιαίτερα σε ερωτήματα στα οποία ζητείται η διατύπωση του συλλογισμού ή της επιχειρηματολογίας που οδήγησε στην απάντηση.

Για τις οδηγίες κωδικοποίησης ανοικτών απαντήσεων (και κάποιων που περιέχουν και «μερικώς αποδεκτές» απαντήσεις), δείτε την ερώτηση 3 του παραδείγματος 2.5.2, την ερώτηση 1 του 2.5.5 και την ερώτηση 4 του 2.5.6.

2.4 Τα επίπεδα μαθηματικής επάρκειας

Τα αποτελέσματα της έρευνας του PISA για τα Μαθηματικά αποτυπώνονται σε έξι επίπεδα μαθηματικής επάρκειας. Αυτά τα επίπεδα αναφέρονται τόσο στη μαθηματική επάρκεια κάθε παιδιού του δείγματος σε κάθε συμμετέχουσα χώρα, όσο και σε κάθε θέμα ξεχωριστά. Ο επόμενος πίνακας περιγράφει συνοπτικά τα έξι επίπεδα μαθηματικής επάρκειας, όπως χρησιμοποιήθηκαν στο PISA 2022 και 2025.

Μπορείτε να δείτε το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας που αντιστοιχεί σε καθένα από τα παραδείγματα που υπάρχουν στο τέλος της ενότητας.

Επίπεδο	Τι μπορούν τυπικά να κάνουν οι μαθητές
6	Στο Επίπεδο 6 οι μαθητές μπορούν να επιλύσουν αφηρημένα προβλήματα και να επιδείξουν δημιουργικότητα και ευέλικτη σκέψη για να αναπτύξουν λύσεις. Για παράδειγμα, μπορούν να αναγνωρίσουν πότε μια διαδικασία, που δεν είναι εξειδικευμένη σε ένα έργο, μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα μη τυποποιημένο πλαίσιο, ή πότε η επίδειξη μιας βαθύτερης κατανόησης μιας μαθηματικής έννοιας είναι απαραίτητη ως μέρος μιας αιτιολόγησης. Μπορούν να συνδέσουν διαφορετικές πηγές πληροφοριών και αναπαραστάσεις, συμπεριλαμβανομένης της αποτελεσματικής χρήσης προσομοιώσεων ή υπολογιστικών φύλλων, ως μέρος της λύσης τους. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο είναι ικανοί για κριτική σκέψη και έχουν γνώση συμβολικών και τυπικών μαθηματικών πράξεων και σχέσεων, που χρησιμοποιούν για να επικοινωνήσουν με σαφήνεια τον συλλογισμό τους. Μπορούν να αναστοχαστούν την καταλληλότητα των ενεργειών τους σε σχέση με τη λύση τους και την αρχική κατάσταση. Αυτού του επιπέδου είναι η ερώτηση 2 του παραδείγματος 2.5.4 και η ερώτηση 1 του παραδείγματος 2.5.5
5	Στο Επίπεδο 5 οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν και να εργαστούν με μοντέλα για σύνθετες καταστάσεις, εντοπίζοντας ή επιβάλλοντας περιορισμούς και καθορίζοντας υποθέσεις. Μπορούν να εφαρμόσουν συστηματικές, καλά σχεδιασμένες στρατηγικές επίλυσης προβλήματος για την αντιμετώπιση πιο απαιτητικών εργασιών, όπως η απόφαση για τον τρόπο ανάπτυξης ενός πειράματος, ο σχεδιασμός μιας βέλτιστης διαδικασίας ή η εργασία με πιο σύνθετες απεικονίσεις, που δεν δίνονται στο έργο. Οι μαθητές επιδεικνύουν αυξημένη ικανότητα επίλυσης προβλημάτων των οποίων οι λύσεις συχνά απαιτούν την ενσωμάτωση μαθηματικών γνώσεων, που δεν αναφέρονται ρητά στο έργο. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο αναστοχάζονται πάνω στην εργασία τους και εξετάζουν τα μαθηματικά αποτελέσματα σε σχέση με το πραγματικό περιβάλλον. Αυτού του επιπέδου είναι η ερώτηση 3 του παραδείγματος 2.5.2 και η ερωτήσεις 1 και 2 του παραδείγματος 2.5.6.

4	Στο Επίπεδο 4 οι μαθητές μπορούν να εργαστούν αποτελεσματικά με σαφή μοντέλα για σύνθετες συγκεκριμένες καταστάσεις, που μερικές φορές περιλαμβάνουν δύο μεταβλητές, καθώς και να επιδείξουν την ικανότητα να εργάζονται με μη προκαθορισμένα μοντέλα που παράγουν χρησιμοποιώντας μια πιο εκλεπτυσμένη υπολογιστική σκέψη. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο αρχίζουν να ασχολούνται με πτυχές της κριτικής σκέψης, όπως η αξιολόγηση της ευλογοφάνειας ενός αποτελέσματος, κάνοντας ποιοτικές κρίσεις, όταν οι υπολογισμοί δεν είναι δυνατοί από τις δεδομένες πληροφορίες. Μπορούν να επιλέξουν και να ενσωματώσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις πληροφοριών, συμπεριλαμβανομένων συμβολικών ή γραφικών, συνδέοντάς τες απευθείας με πτυχές καταστάσεων του πραγματικού κόσμου. Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές μπορούν επίσης να κατασκευάσουν και να επικοινωνήσουν εξηγήσεις και επιχειρήματα με βάση τις ερμηνείες, τον συλλογισμό και τη μεθοδολογία τους. Αυτού του επιπέδου είναι η ερώτηση 3 του παραδείγματος 2.5.7.
3	Στο Επίπεδο 3 οι μαθητές μπορούν να επινοήσουν στρατηγικές επίλυσης, συμπεριλαμβανομένων στρατηγικών που απαιτούν διαδοχική λήψη αποφάσεων ή/και ευελιξία στην κατανόηση οικείων εννοιών. Σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές αρχίζουν να χρησιμοποιούν δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης για να αναπτύξουν τη στρατηγική λύσης τους. Είναι σε θέση να επιλύουν έργα που απαιτούν την εκτέλεση αρκετών διαφορετικών αλλά γνωστών υπολογισμών, που δεν ορίζονται όλοι σαφώς στη διατύπωση του προβλήματος. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν χωρική οπτικοποίηση ως μέρος μιας στρατηγικής λύσης ή να καθορίσουν πώς να χρησιμοποιήσουν μια προσομοίωση για να συλλέξουν δεδομένα κατάλληλα για την εργασία. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο μπορούν να ερμηνεύσουν και να χρησιμοποιήσουν αναπαραστάσεις που βασίζονται σε διαφορετικές πηγές πληροφοριών και να κάνουν συλλογισμούς απευθείας από αυτές, συμπεριλαμβανομένης της χρήσης ενός πίνακα διπλής εισόδου. Συνήθως δείχνουν κάποια ικανότητα να χειρίζονται ποσοστά, κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς, και να εργάζονται με αναλογικές σχέσεις. Αυτού του επιπέδου είναι η ερώτηση 1 του παραδείγματος 2.5.1, και οι ερωτήσεις 1 και 2 του παρ. 2.5.3.
2	Στο Επίπεδο 2 οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν καταστάσεις όπου χρειάζεται να σχεδιάσουν απλές στρατηγικές για να λύσουν ένα πρόβλημα, συμπεριλαμβανομένης της εκτέλεσης απλών προσομοιώσεων που περιλαμβάνουν μία μεταβλητή. Μπορούν να εξαγάγουν σχετικές πληροφορίες από μία ή περισσότερες πηγές που χρησιμοποιούν ελαφρώς πιο σύνθετους τρόπους αναπαράστασης, όπως πίνακες διπλής εισόδου, γραφήματα ή δισδιάστατες αναπαραστάσεις τρισδιάστατων αντικειμένων. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο επιδεικνύουν βασική κατανόηση των συναρτησιακών σχέσεων και μπορούν να λύσουν προβλήματα που αφορούν απλές αναλογίες. Είναι ικανοί να κάνουν κυριολεκτικές ερμηνείες των αποτελεσμάτων. Αυτού του επιπέδου είναι η ερώτηση 2 του παραδείγματος 2.5.1, η ερώτηση 2 του παραδείγματος 2.5.2.
1α	Στο Επίπεδο 1α οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν σε ερωτήσεις που αφορούν απλά πλαίσια, όπου όλες οι απαραίτητες πληροφορίες είναι παρούσες και οι ερωτήσεις είναι σαφώς καθορισμένες. Οι πληροφορίες μπορούν να παρουσιαστούν σε μια ποικιλία απλών μορφών και οι μαθητές μπορεί να χρειαστεί να εργαστούν με δύο πηγές ταυτόχρονα για να εξαγάγουν σχετικές πληροφορίες. Είναι σε θέση να εκτελούν απλές,

	συνήθεις διαδικασίες σύμφωνα με άμεσες οδηγίες σε σαφείς καταστάσεις, οι οποίες μπορεί να απαιτούν πολλαπλές επαναλήψεις μιας συνήθους διαδικασίας για την επίλυση ενός προβλήματος. Μπορούν να εκτελούν ενέργειες που είναι προφανείς ή που απαιτούν ελάχιστη σύνθεση πληροφοριών, αλλά προκύπτουν σαφώς από τα δεδομένα ερεθίσματα. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο μπορούν να χρησιμοποιήσουν βασικούς αλγόριθμους, τύπους, διαδικασίες ή συμβάσεις για να λύσουν προβλήματα που συνήθως περιλαμβάνουν ακέραιους αριθμούς. Αυτού του επιπέδου είναι η ερώτηση 1 του παραδείγματος 2.5.2.
1β	Στο Επίπεδο 1β οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν σε ερωτήσεις που αφορούν εύκολα κατανοητά πλαίσια, όπου όλες οι απαραίτητες πληροφορίες δίνονται με σαφήνεια σε μία απλή αναπαράσταση (δηλαδή, σε μορφή πίνακα ή γραφήματος). Αν είναι απαραίτητο, αναγνωρίζουν πότε ορισμένες πληροφορίες είναι περιττές και μπορούν να αγνοηθούν σε σχέση με τη συγκεκριμένη ερώτηση. Είναι σε θέση να εκτελούν απλούς υπολογισμούς με ακέραιους αριθμούς, οι οποίοι προκύπτουν από σαφώς καθορισμένες οδηγίες, που αποτυπώνονται σε σύντομο και απλό κείμενο. Αυτού του επιπέδου είναι οι ερωτήσεις του θέματος «Ρόδα Λούνα Παρκ» της πλατφόρμας skills4life.
1γ	Στο Επίπεδο 1γ οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν σε ερωτήσεις που αφορούν εύκολα κατανοητά πλαίσια, όπου όλες οι σχετικές πληροφορίες δίνονται με σαφήνεια σε μια απλή, οικεία μορφή (π.χ. σε έναν μικρό πίνακα ή μια εικόνα) και αποτυπώνονται σε ένα πολύ σύντομο και απλό κείμενο. Είναι σε θέση να ακολουθήσουν μια σαφή οδηγία που περιγράφει ένα μόνο βήμα ή πράξη. Το επίπεδο αυτό ερωτήσεων χρησιμοποιείται σε αναπτυσσόμενες κυρίως χώρες, για να ανιχνεύσει εντελώς στοιχειώδεις μαθηματικές ικανότητες.

2.5 Παραδείγματα Θεμάτων στην έρευνα PISA

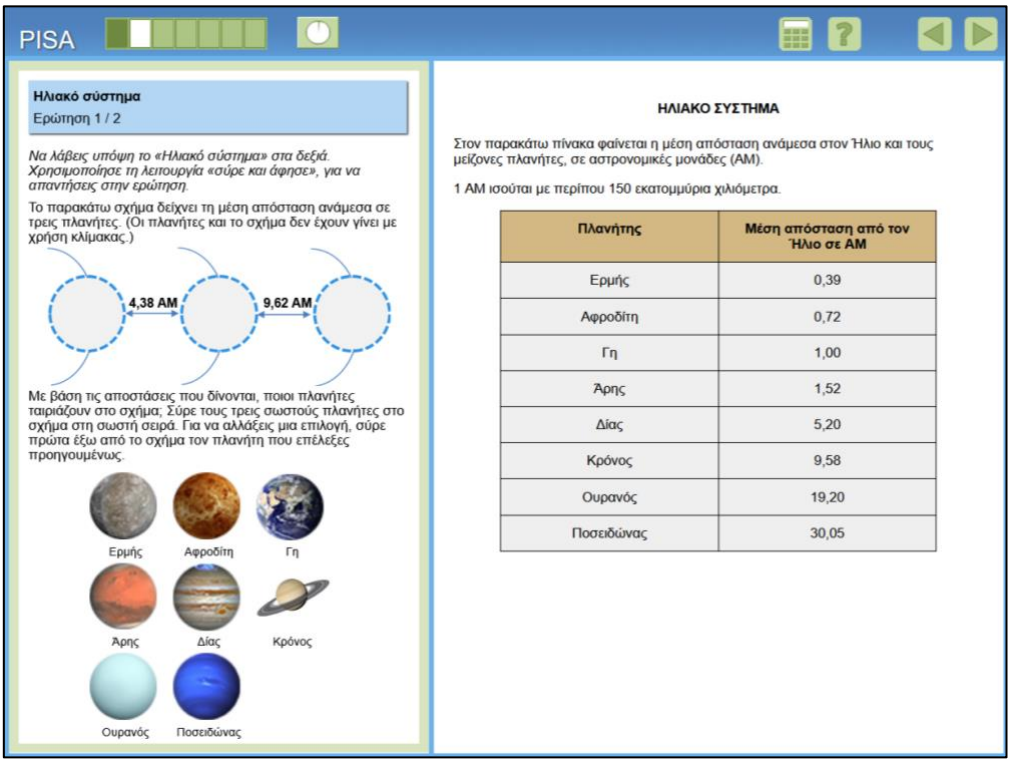
Στη συνέχεια παρουσιάζονται παραδείγματα θεμάτων. Σε κάθε παράδειγμα εμφανίζεται ο σύνδεσμος στον οποίο ο αναγνώστης μπορεί να δει το θέμα και να το απαντήσει, και στη συνέχεια, για κάθε ερώτηση εμφανίζονται μια εικόνα της (στιγμιότυπο οθόνης) και τα μεταδεδομένα της ερώτησης. Στις περιπτώσεις που η ερώτηση είναι ανοικτής απάντησης, εμφανίζεται και ο οδηγός κωδικοποίησης των απαντήσεων.

2.5.1. Ηλιακό σύστημα

https://pisa2022-questions.oecd.org/platform/index.html?user=&unit=MAT/MA123-SolarSystem&lang=ell-GRC

SCAN ME

Ερώτηση 1



διεργασία	ερμηνεία
μαθηματικό περιεχόμενο	ποσότητα
πλαίσιο	επιστημονικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	3

Η διεργασία είναι η ερμηνεία, εφόσον τα παιδιά καλούνται να ερμηνεύσουν τα μαθηματικά δεδομένα (αποστάσεις από τον Ήλιο), για να εντοπίσουν τους πλανήτες τους οποίους αφορούν οι συνθήκες της ερώτησης

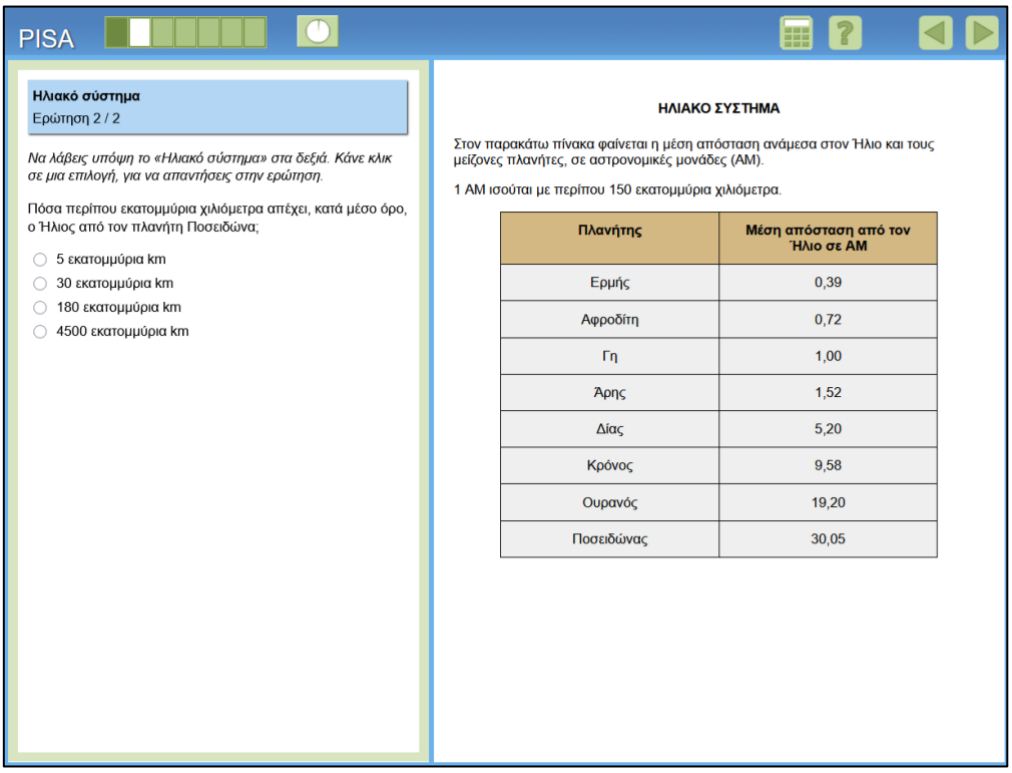
Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η ποσότητα, αφού κυριαρχούν οι αριθμοί (ως αποστάσεις) και η διάταξή τους.

Το πλαίσιο είναι επιστημονικό, αφού το πρόβλημα προέρχεται από την αστρονομία.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 3, εφόσον οι μαθητές θα πρέπει να επινοήσουν μια στρατηγική επίλυσης που να περιλαμβάνει ευελιξία στην κατανόηση οικείων εννοιών, δηλαδή να συνδυάσουν με σωστό τρόπο τα δεδομένα του πίνακα (αποστάσεις των πλανητών από τον Ήλιο), για να τοποθετήσουν στη σειρά τους σωστούς πλανήτες με τις δεδομένες αποστάσεις μεταξύ τους. Επίσης, καλούνται να εκτελέσουν

διαφορετικούς αλλά συνηθισμένους υπολογισμούς, οι οποίοι δεν είναι σαφώς διατυπωμένοι στο πρόβλημα.

Ερώτηση 2



διεργασία	εφαρμογή
μαθηματικό περιεχόμενο	ποσότητα
πλαίσιο	επιστημονικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	2

Η διεργασία είναι η εφαρμογή, εφόσον τα παιδιά καλούνται να εφαρμόσουν τη σχέση 1ΑΜ=150 εκατομμύρια km για να υπολογίσουν το ζητούμενο.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η ποσότητα, αφού κυριαρχούν οι αριθμοί (ως αποστάσεις) και οι πράξεις τους για να υπολογιστεί το ζητούμενο.

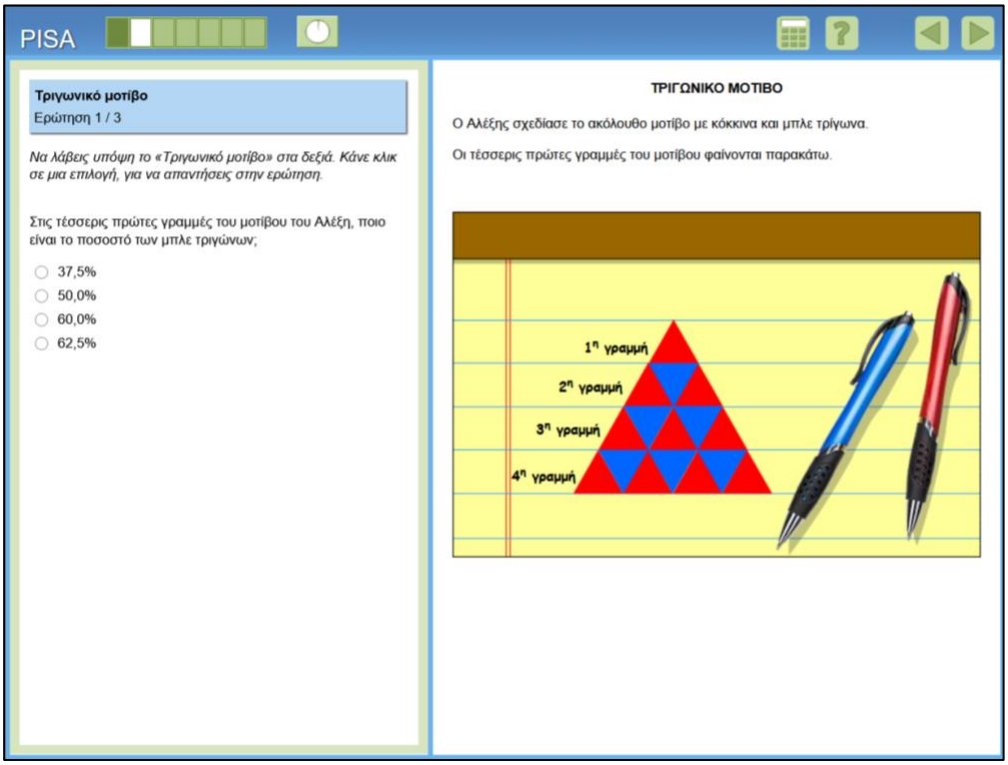
Το πλαίσιο είναι επιστημονικό, αφού το πρόβλημα προέρχεται από την αστρονομία.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 2, αφού οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν και να χρησιμοποιήσουν την πληροφορία που συνδέει τις αστρονομικές μονάδες με τα χιλιόμετρα, μια πληροφορία που δίνεται με τον σαφή αλλά ελαφρώς πιο σύνθετο τρόπο του πίνακα δεδομένων.

2.5.2. Τριγωνικό μοτίβο

https://pisa2022-questions.oecd.org/platform/index.html?user=&unit=MAT/MA150-TriangularPattern&lang=ell-GRC

Ερώτηση 1



διεργασία	εφαρμογή
μαθηματικό περιεχόμενο	ποσότητα
πλαίσιο	επιστημονικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	1α

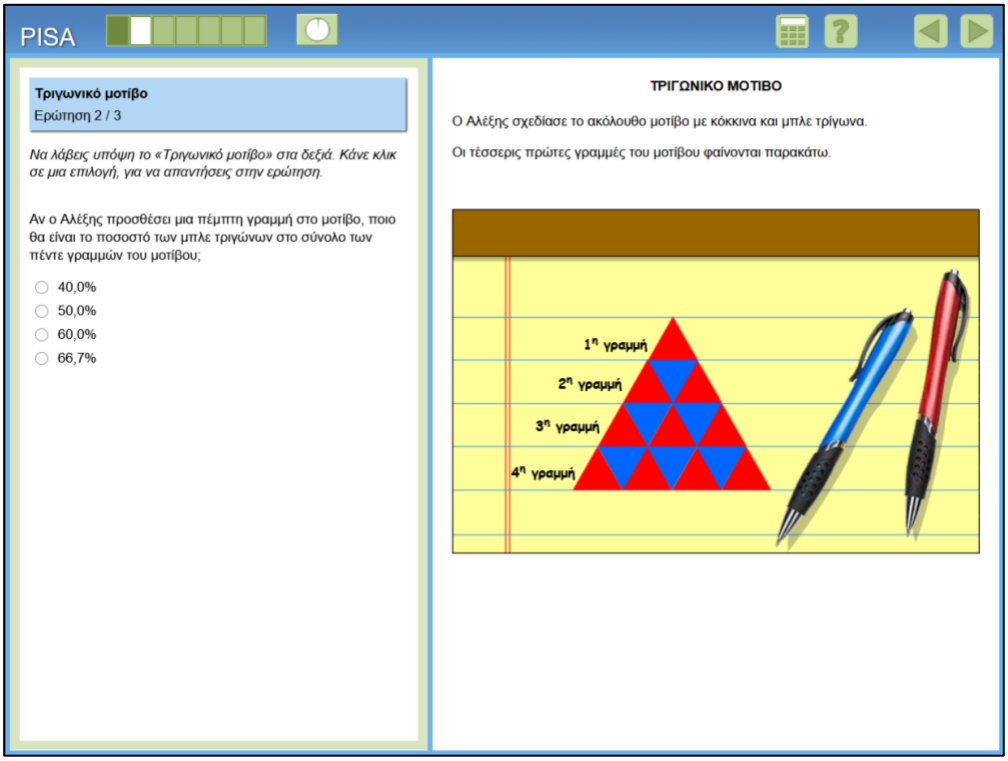
Η διεργασία είναι η εφαρμογή, εφόσον τα παιδιά καλούνται να εφαρμόσουν την ιδέα του ποσοστού ως μέρος του όλου για να υπολογίσουν το ποσοστό των μπλε τριγώνων.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η ποσότητα, αφού κυριαρχούν οι αριθμοί ως πλήθος τριγώνων και ως ποσοστό.

Το πλαίσιο είναι επιστημονικό, αφού το πρόβλημα προέρχεται από τα μαθηματικά (γεωμετρία), είναι ένα ενδομαθηματικό πρόβλημα.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 1α, εφόσον οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν τις σαφώς διατυπωμένες πληροφορίες σε ένα απλό πλαίσιο (να μετρήσουν τα μπλε τρίγωνα και το συνολικό πλήθος των τριγώνων στο σχήμα). Επιπλέον, να εξαγάγουν συμπεράσματα με ελάχιστη σύνθεση των πληροφοριών αυτών.

Ερώτηση 2



διεργασία	διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά
μαθηματικό περιεχόμενο	αλλαγή και σχέσεις
πλαίσιο	επιστημονικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	2

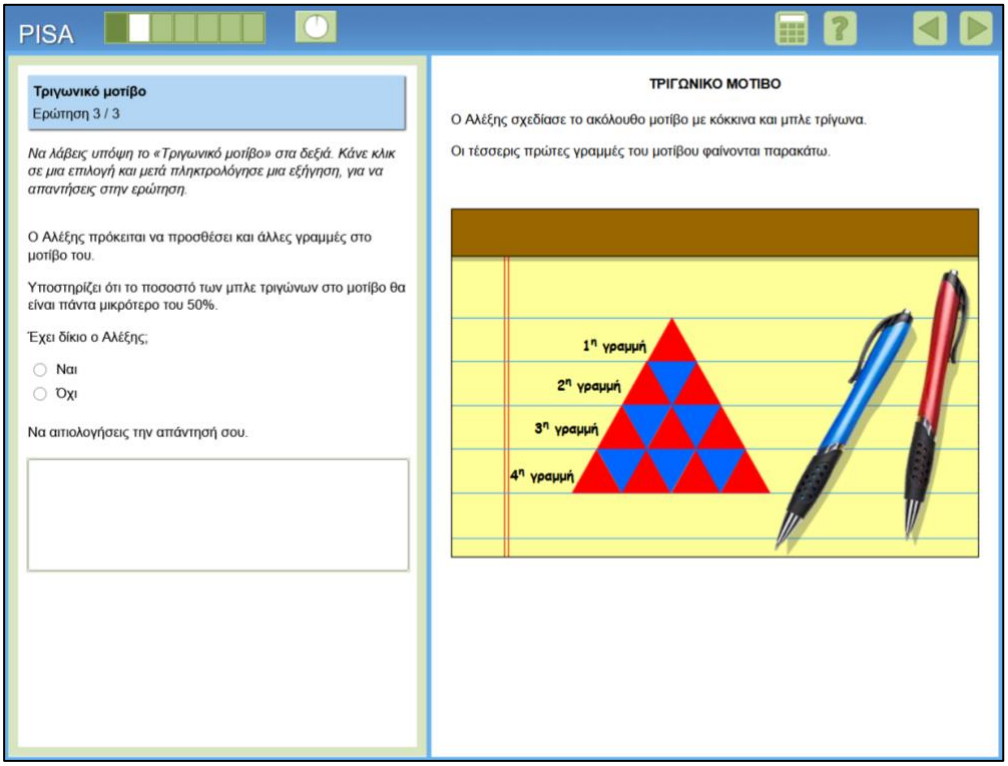
Η διεργασία είναι η διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά, εφόσον τα παιδιά καλούνται να διατυπώσουν με μαθηματικό τρόπο το σύνολο των πέντε γραμμών, κάνοντας μια μαθηματική γενίκευση για το πώς θα είναι η πέμπτη γραμμή.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η αλλαγή και σχέσεις, αφού αναφέρεται σε μια γενίκευση του μοτίβου (εύρεση του επόμενου όρου).

Το πλαίσιο είναι επιστημονικό, αφού είναι ένα ενδομαθηματικό πρόβλημα.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 2, εφόσον οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν ένα μοτίβο και να σχεδιάσουν μια απλή στρατηγική: να χρησιμοποιήσουν το μοτίβο για να βρουν τα μπλε τρίγωνα της 5ης γραμμής και το σύνολο των τριγώνων της γραμμής αυτής.

Ερώτηση 3



διεργασία	μαθηματικός συλλογισμός
μαθηματικό περιεχόμενο	αλλαγή και σχέσεις
πλαίσιο	επιστημονικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	5 (4 για τις μερικώς αποδεκτές απαντήσεις)

Η διεργασία είναι ο μαθηματικός συλλογισμός, εφόσον τα παιδιά καλούνται να αντιληφθούν τις κανονικότητες που υπάρχουν στο πρόβλημα, προκειμένου να εξαγάγουν λογικά συμπεράσματα.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η αλλαγή και σχέσεις, αφού η κυρίαρχη έννοια είναι οι κανονικότητες και ο τρόπος με τον οποίο η συγκεκριμένη κανονικότητα εξελίσσεται, διατηρώντας αναλλοίωτη τη σχέση μεταξύ μπλε και κόκκινων τριγώνων.

Το πλαίσιο είναι επιστημονικό, αφού είναι ένα ενδομαθηματικό πρόβλημα

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 5, διότι οι μαθητές καλούνται να αναπτύξουν μια πολύπλοκη κατάσταση και να εργαστούν σε αυτήν, εντοπίζοντας περιορισμούς και προσδιορίζοντας υποθέσεις (κάνουν γενίκευση για το πλήθος των τριγώνων, μπλε και κόκκινων, σε οποιαδήποτε γραμμή). Στο επίπεδο αυτό επιδεικνύουν αυξημένη ικανότητα επίλυσης προβλημάτων των οποίων οι λύσεις απαιτούν συχνά την ενσωμάτωση μαθηματικών γνώσεων που δεν αναφέρονται ρητά στο πρόβλημα.

Η παραπάνω ερώτηση απαιτεί μια απάντηση ανοικτού τύπου. Ο οδηγός κωδικοποίησης των απαντήσεων φαίνεται παρακάτω.

Αποδεκτή απάντηση

Ο/Η μαθητής/τρια επιλέγει «Ναι» και δίνει μια αποδεκτή αιτιολόγηση σύμφωνα με την οποία θα υπάρχουν πάντα περισσότερα κόκκινα (ή λιγότερα μπλε) τρίγωνα. [*Μια αποδεκτή απάντηση πρέπει να αναφέρει «σε κάθε γραμμή» (ή συνώνυμη έκφραση)*.]

- Έχει δίκιο επειδή υπάρχει πάντα ένα κόκκινο τρίγωνο παραπάνω σε σχέση με τα μπλε σε κάθε γραμμή. [*Εδώ εννοείται το «Ναι»*.]
- [Ναι] Θα υπάρχει πάντα ένα λιγότερο μπλε τρίγωνο σε κάθε γραμμή.
- [Ναι] Υπάρχει ένα κόκκινο τρίγωνο παραπάνω σε σχέση με τα μπλε σε κάθε γραμμή. [*Θεωρείται σωστό παρά το γεγονός ότι δεν αναφέρει «πάντα» στην απάντηση, εφόσον δηλώνεται στην εκφώνηση της ερώτησης*.]
- [Ναι] Γιατί τα κόκκινα τρίγωνα βρίσκονται στο εξωτερικό κάθε γραμμής και μέσα στη γραμμή εναλλάσσονται τα κόκκινα και τα μπλε τρίγωνα. [*Αποδεκτή αιτιολόγηση η οποία επιβεβαιώνει ότι σε κάθε γραμμή υπάρχουν περισσότερα κόκκινα τρίγωνα από ό,τι μπλε*.]

Μερικώς αποδεκτή απάντηση

Ο/Η μαθητής/τρια επιλέγει «Ναι» και η αιτιολόγηση είναι μερικώς αποδεκτή, αλλά δεν είναι πλήρης.

- [Ναι] Επειδή η πρώτη γραμμή έχει μόνο ένα κόκκινο τρίγωνο.
- [Ναι] Δεν υπάρχει κανένα μπλε τρίγωνο στην πρώτη γραμμή.
- [Ναι] Υπάρχει ένα παραπάνω κόκκινο τρίγωνο σε σχέση με τα μπλε. [*Δεν προσδιορίζει «σε κάθε γραμμή». Να συγκρίνετε με Κωδικό 2, παράδειγμα 3*.]

- [Ναι] Γιατί τα κόκκινα τρίγωνα βρίσκονται στο εξωτερικό κάθε γραμμής και τα μπλε τρίγωνα παραμένουν στο εσωτερικό. [*Η αιτιολόγηση δεν είναι πλήρης, διότι τα κόκκινα τρίγωνα στο εσωτερικό δεν αναφέρονται. Να συγκρίνετε με Κωδικό 2, παράδειγμα 4*.]

Μη αποδεκτή απάντηση

Άλλες απαντήσεις που περιλαμβάνουν την επιλογή «Ναι» αλλά με μία λανθασμένη ή καμία αιτιολόγηση, ή την επιλογή «Όχι» με ή χωρίς αιτιολόγηση.

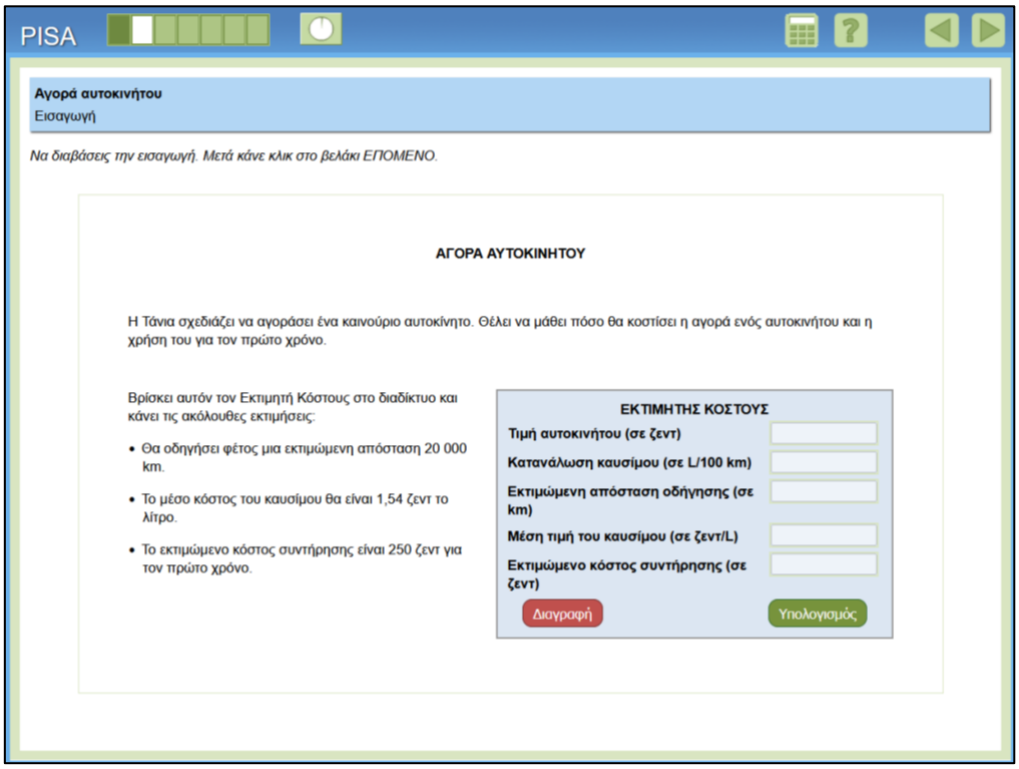
- [Ναι] κόκκινα = 62,5% και μπλε = 37,5%. [*Ποσοστά των τριγώνων από κάθε χρώμα στις τέσσερις πρώτες γραμμές*.]
- [Ναι].

2.5.3. Αγοράζοντας αυτοκίνητο

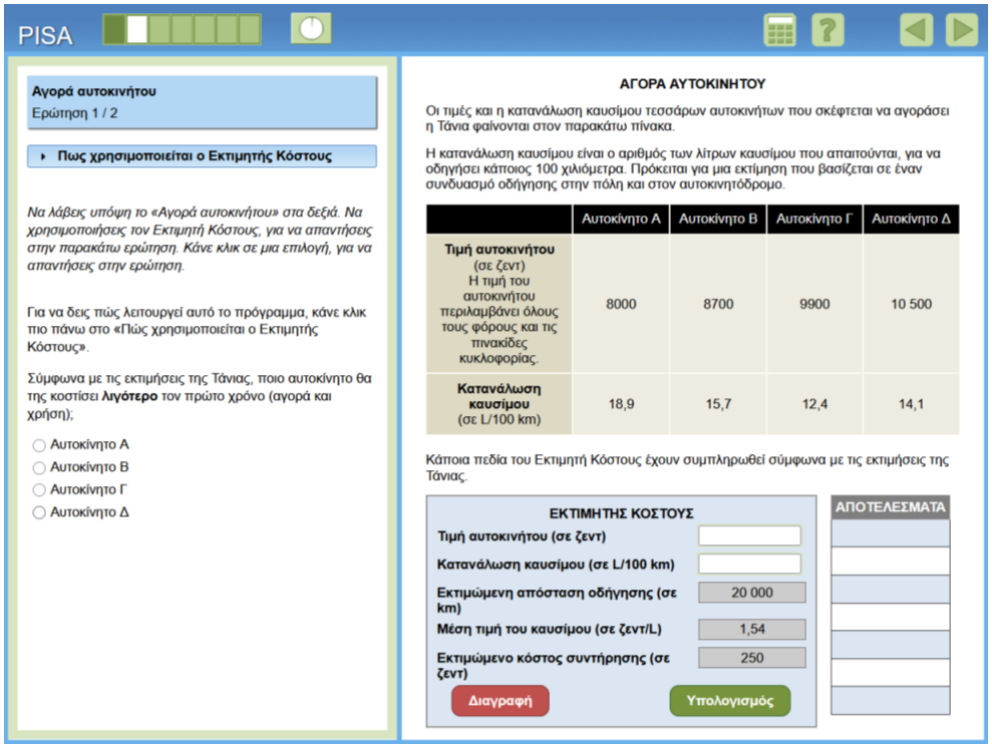
https://pisa2022-questions.oecd.org/platform/index.html?user=&unit=MAT/MA104-CarPurchase&lang=ell-GRC

SCAN ME

Εισαγωγή



Ερώτηση 1



διεργασία	διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά
μαθηματικό περιεχόμενο	ποσότητα
πλαίσιο	προσωπικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	3

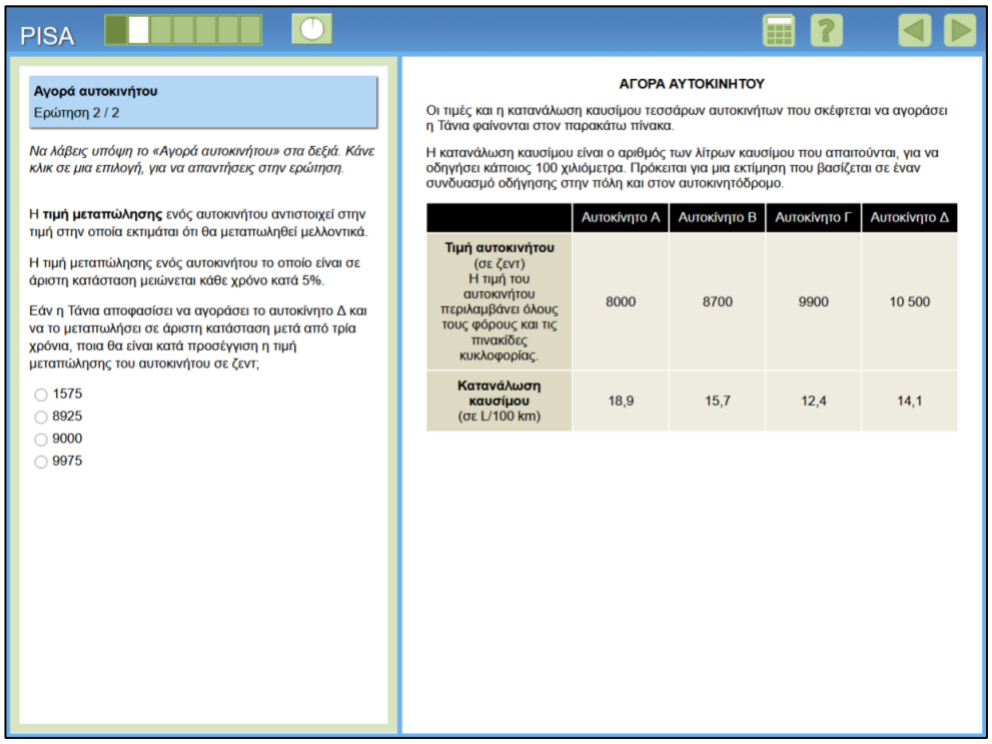
Η διεργασία είναι η διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά, εφόσον τα παιδιά καλούνται να «μεταφράσουν» τις πληροφορίες σε μαθηματική γλώσσα, ώστε με τη βοήθεια του εκτιμητή να προσδιορίσουν το αυτοκίνητο που κοστίζει λιγότερο τον πρώτο χρόνο.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η ποσότητα, αφού κυριαρχούν οι αριθμοί και οι υπολογισμοί με αυτούς.

Το πλαίσιο είναι προσωπικό, εφόσον αναφέρεται σε δραστηριότητα (αγορά αυτοκινήτου) του ατόμου.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 3, διότι οι μαθητές θα πρέπει να ερμηνεύσουν και να χρησιμοποιήσουν τον πίνακα διπλής εισόδου ως πηγή πληροφοριών, και να καθορίσουν πώς θα χρησιμοποιήσουν την προσομοίωση για να πάρουν πληροφορίες ώστε να λύσουν το πρόβλημα.

Ερώτηση 2



διεργασία	διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά
μαθηματικό περιεχόμενο	ποσότητα
πλαίσιο	προσωπικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	3

Η διεργασία είναι η διατύπωση καταστάσεων με μαθηματικό τρόπο, εφόσον τα παιδιά καλούνται να «μεταφράσουν» την πληροφορία σχετικά με τη μεταπώληση του αυτοκινήτου σε μαθηματική γλώσσα, ώστε να προσδιορίσουν την τιμή μεταπώλησης ύστερα από 3 χρόνια. Υπάρχουν και πτυχές εφαρμογής, εφόσον θα πρέπει να εφαρμόσουν τις διαδικασίες υπολογισμού, αλλά κυριαρχεί η διεργασία της διατύπωσης.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η ποσότητα, εφόσον κυριαρχούν οι αριθμοί και οι υπολογισμοί.

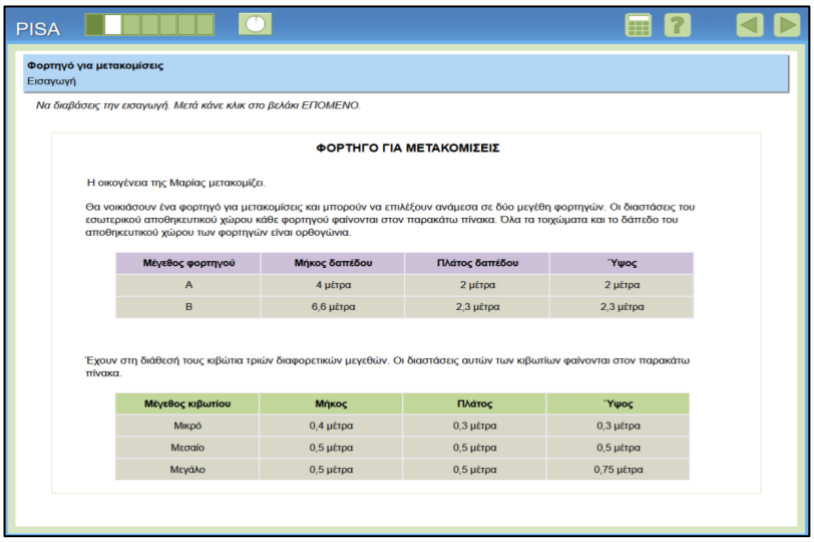
Το πλαίσιο είναι προσωπικό, εφόσον αναφέρεται σε δραστηριότητα (αγορά και μεταπώληση αυτοκινήτου) του ατόμου.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 3, αφού οι μαθητές καλούνται να επινοήσουν μια στρατηγική επίλυσης που απαιτεί ευελιξία στην κατανόηση της έννοιας του ποσοστού, ώστε να το χρησιμοποιήσουν τρεις φορές διαδοχικά.

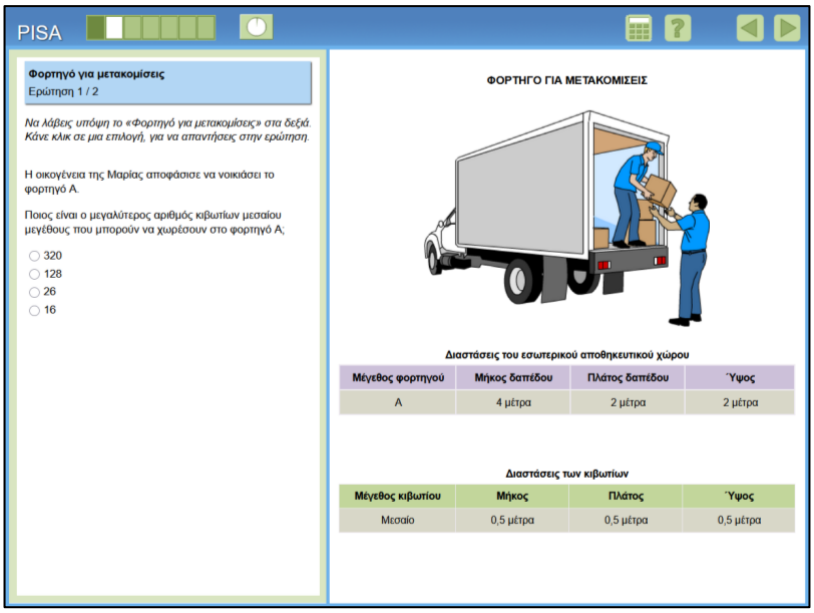
2.5.4. Φορτηγό για μετακομίσεις

https://pisa2022-questions.oecd.org/platform/index.html?user=&unit=MAT/MA118-MovingTruck&lang=ell-GRC

Εισαγωγή



Ερώτηση 1



διεργασία	διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά
μαθηματικό περιεχόμενο	ποσότητα
πλαίσιο	επαγγελματικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	3

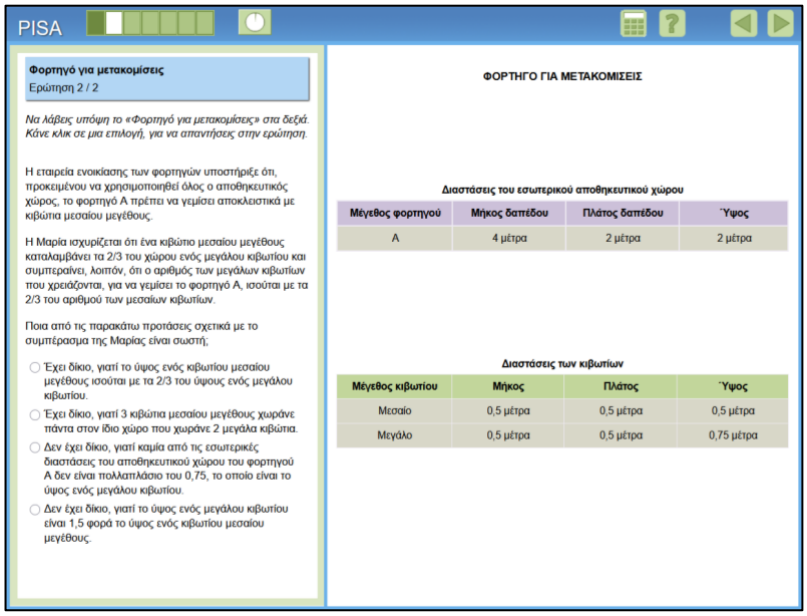
Η διεργασία είναι η διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά, εφόσον τα παιδιά θα πρέπει να «μεταφράσουν» τις πληροφορίες σε μαθηματική γλώσσα, για να διαπιστώσουν ότι οι διαστάσεις του φορτηγού είναι τέτοιες ώστε να χωρούν ακριβώς 8 κιβώτια στο μήκος, 4 στο πλάτος και 4 στο ύψος.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η ποσότητα, αφού κυριαρχούν οι αριθμοί (διαστάσεις κιβωτίων και φορτηγού) και η μεταξύ τους σχέση.

Το πλαίσιο είναι επαγγελματικό, εφόσον αναφέρεται στον χώρο της εργασίας (μεταφορές).

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 3, διότι οι μαθητές καλούνται να καθορίσουν πώς να χρησιμοποιήσουν τη χωρική οπτικοποίηση του φορτηγού και των κιβωτίων και να εκτελέσουν μέτριας δυσκολίας αλλά συνηθισμένους υπολογισμούς, που δεν είναι ρητά προσδιορισμένοι από το πρόβλημα.

Ερώτηση 2



διεργασία	ερμηνεία
μαθηματικό περιεχόμενο	ποσότητα
πλαίσιο	επαγγελματικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	6

Η διεργασία είναι η ερμηνεία, εφόσον τα παιδιά καλούνται να ερμηνεύσουν ισχυρισμούς και να αξιολογήσουν διατυπωμένα συμπεράσματα.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η ποσότητα, αφού κυριαρχούν οι αριθμοί (διαστάσεις κιβωτίων και φορτηγού) και η μεταξύ τους σχέση (με έμφαση στο πόσα ολόκληρα κιβώτια χωρούν στο ύψος).

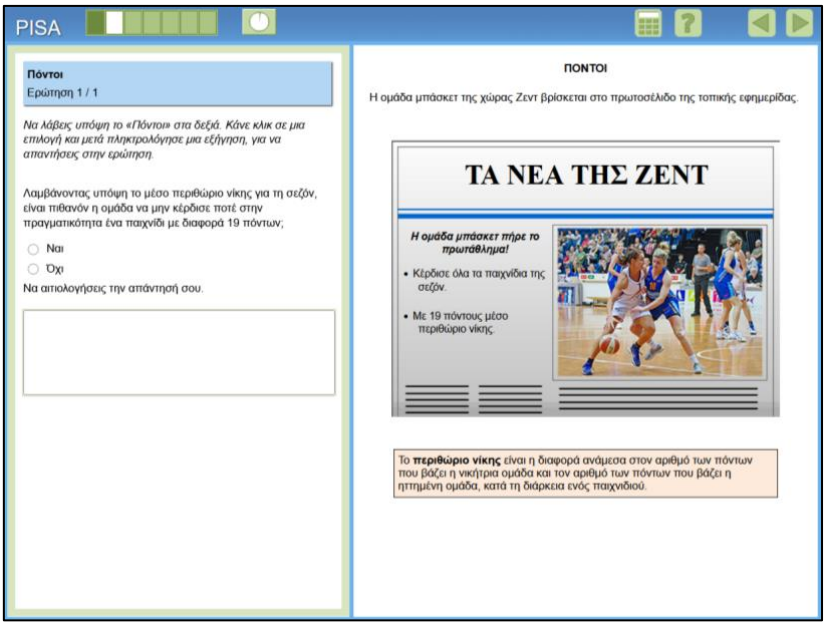
Το πλαίσιο είναι επαγγελματικό, εφόσον αναφέρεται στον χώρο της εργασίας (μεταφορές).

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 6, διότι οι μαθητές θα πρέπει να συνδυάσουν τις μαθηματικές πληροφορίες με τις πραγματικές διαστάσεις του φορτηγού και του μεγάλου κιβωτίου με τρόπο δημιουργικό και ευέλικτο. Επιπλέον, θα πρέπει με κριτικό τρόπο να αναγνωρίσουν ότι εκτός από τη σύγκριση μεταξύ των διαστάσεων των κιβωτίων, στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι περιορισμοί των διαστάσεων του φορτηγού είναι καθοριστικοί.

2.5.5. Πόντοι

https://pisa2022-questions.oecd.org/platform/index.html?user=&unit=MAT/MA156-Points&lang=ell-GRC

Ερώτηση 1



διεργασία	μαθηματικός συλλογισμός
μαθηματικό περιεχόμενο	αβεβαιότητα και δεδομένα
πλαίσιο	κοινωνικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	6

Η διεργασία είναι ο μαθηματικός συλλογισμός, εφόσον τα παιδιά καλούνται να εξαγάγουν λογικά συμπεράσματα και να επιχειρηματολογήσουν για αυτά.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η αβεβαιότητα και δεδομένα, αφού πρόκειται για πρόβλημα στατιστικής (της έννοιας της μέσης τιμής), στο οποίο είναι κυρίαρχη η μεταβλητότητα των δεδομένων.

Το πλαίσιο είναι κοινωνικό, αφού προέρχεται από την ενημέρωση για τον αθλητισμό, που είναι θέμα κοινωνικού ενδιαφέροντος.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 6, διότι οι μαθητές καλούνται να επιδείξουν δημιουργικότητα, ευέλικτη σκέψη καθώς και βαθύτερη κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας (μέση τιμή - μέσο περιθώριο νίκης) ως μέρος της αιτιολόγησης. Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό είναι ικανοί για κριτική σκέψη και μπορούν να αναλογιστούν την καταλληλότητα των ενεργειών που περιγράφονται στην ερώτηση, για να επικοινωνήσουν με σαφήνεια τον συλλογισμό τους.

Η παραπάνω ερώτηση απαιτεί μια απάντηση ανοικτού τύπου. Ο οδηγός κωδικοποίησης των απαντήσεων φαίνεται παρακάτω.

Αποδεκτή απάντηση

Ο/Η μαθητής/τρια επιλέγει «Ναι» και η αιτιολόγηση αναφέρει ή δείχνει ότι ο μέσος όρος δεν χρειάζεται να συμπεριλαμβάνεται στο σύνολο δεδομένων.

- Είναι δυνατόν, επειδή ο μέσος όρος δεν είναι απαραίτητο να είναι μία από τις τιμές στο σύνολο των δεδομένων. [Εδώ εννοείται το «Ναι».]
- [Ναι] Εάν τα περιθώρια νίκης δίνουν έναν μέσο όρο 19, δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει περιθώριο νίκης 19 πόντων σε κάποιο από αυτά. [Κωδικός αποδεκτής απάντησης για: «…δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει περιθώριο νίκης 19 πόντων σε κάποιο από αυτά».]
- [Ναι] Εάν μία διαφορά ήταν 16 πόντοι και μία άλλη ήταν 22 πόντοι, τότε η μέση διαφορά θα ήταν 19 πόντοι, αλλά το 19 δεν περιλαμβάνεται στις διαφορές.
- [Ναι] Ο μέσος όρος των αριθμών 2, 4, και 9 είναι 5, αλλά το 5 δεν είναι ένας από τους αριθμούς.

Μερικώς αποδεκτή απάντηση

Ο/Η μαθητής/τρια επιλέγει «Ναι» και η αιτιολόγηση είναι μερικώς αποδεκτή, αλλά δεν είναι πλήρης.

- [Ναι] Είναι μία μέση διαφορά, άρα κάποια παιχνίδια κερδήθηκαν με περισσότερους από 19 πόντους και κάποια με λιγότερους από 19 πόντους. [Δεν είναι πλήρης απάντηση, δεν αναφέρει ρητά ότι το 19 δεν είναι απαραίτητο να είναι μία από τις τιμές. Προκειμένου σε μία απάντηση σαν αυτή να δοθεί κωδικός μερικώς αποδεκτής απάντησης, πρέπει να αναφέρονται ρητά σε αυτή και τα δύο, δηλαδή νίκη με περισσότερους και με λιγότερους από 19 πόντους.]

Μη αποδεκτή απάντηση

Άλλες απαντήσεις που περιλαμβάνουν την επιλογή «Ναι», αλλά με μία λανθασμένη ή καμία αιτιολόγηση, ή την επιλογή «Όχι» με ή χωρίς αιτιολόγηση.

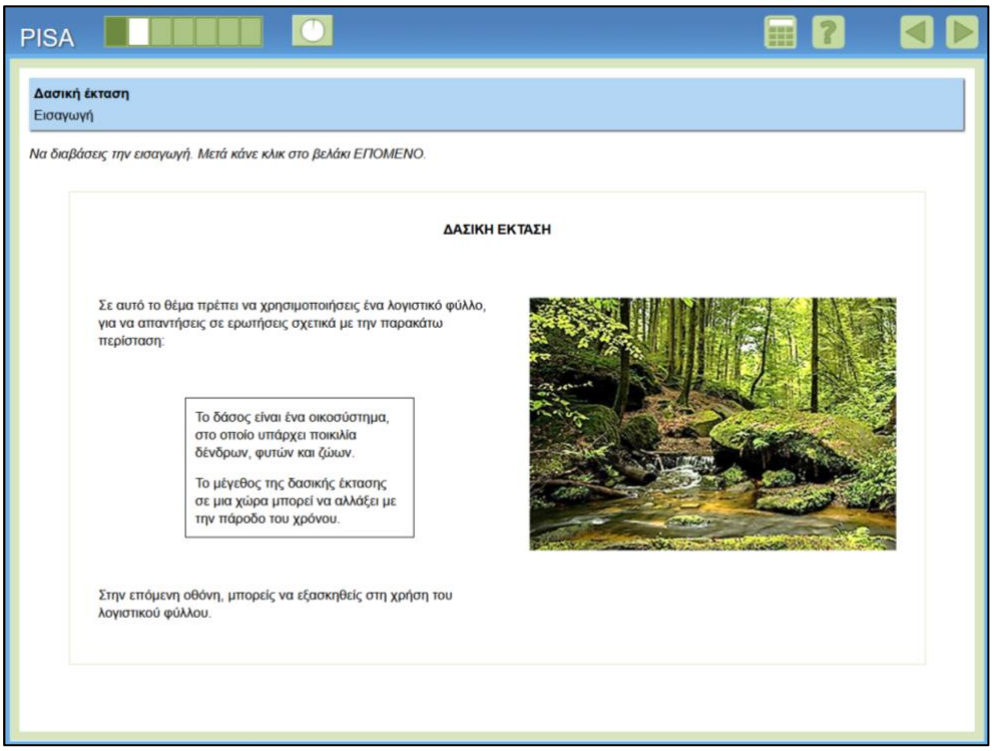
- [Όχι] Θα έπρεπε να είχε κερδίσει τουλάχιστον ένα παιχνίδι με διαφορά 19 πόντων.
- [Ναι].
- [Ναι] Γιατί ο μέσος όρος βγαίνει από όλα τα περιθώρια νίκης της σεζόν, που τα προσθέτουμε και μετά τα διαιρούμε με τον αριθμό των παιχνιδιών που έπαιξαν εκείνη τη σεζόν. [Μη αποδεκτή αιτιολόγηση διότι περιγράφει μόνο πώς προκύπτει ένας μέσος όρος.]
- [Ναι] Γιατί είναι απλά ένας μέσος όρος. [Δεν εξηγεί ότι μέσος όρος σημαίνει ότι είναι πιθανό να μην κέρδισε ποτέ στην πραγματικότητα κάποιο παιχνίδι με 19 πόντους.]
- [Ναι] Είναι μία μέση διαφορά, άρα κάποια παιχνίδια κερδήθηκαν με περισσότερους από 19 πόντους. [Μη αποδεκτή απάντηση διότι δεν αναφέρει ρητά και τη νίκη με λιγότερους από 19 πόντους.]

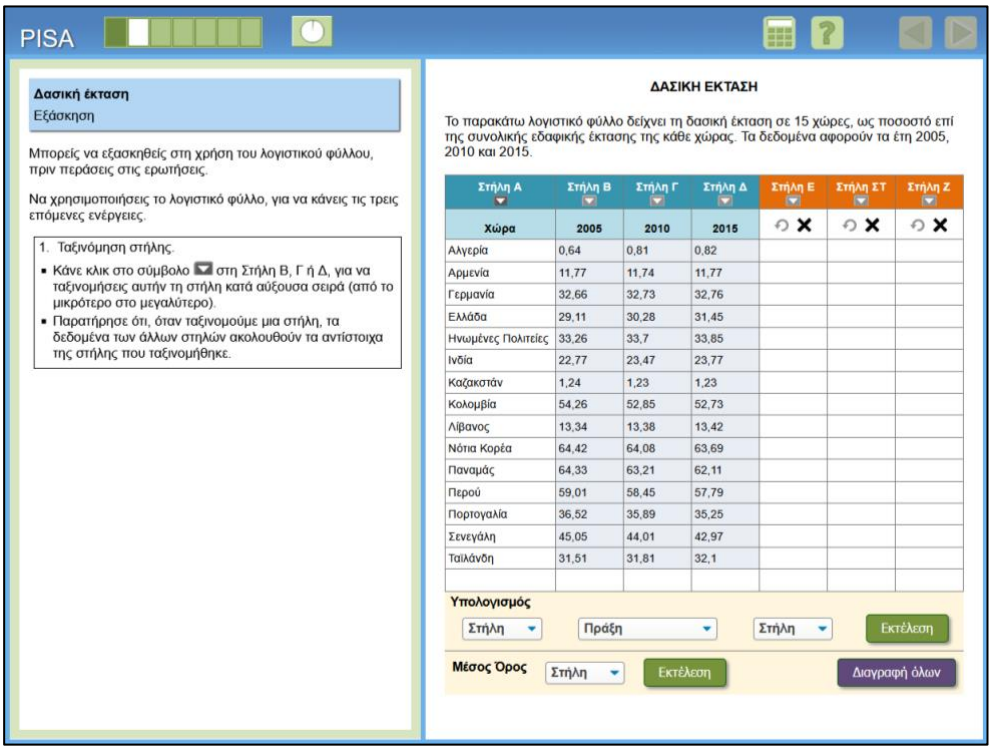
2.5.6. Δασική έκταση

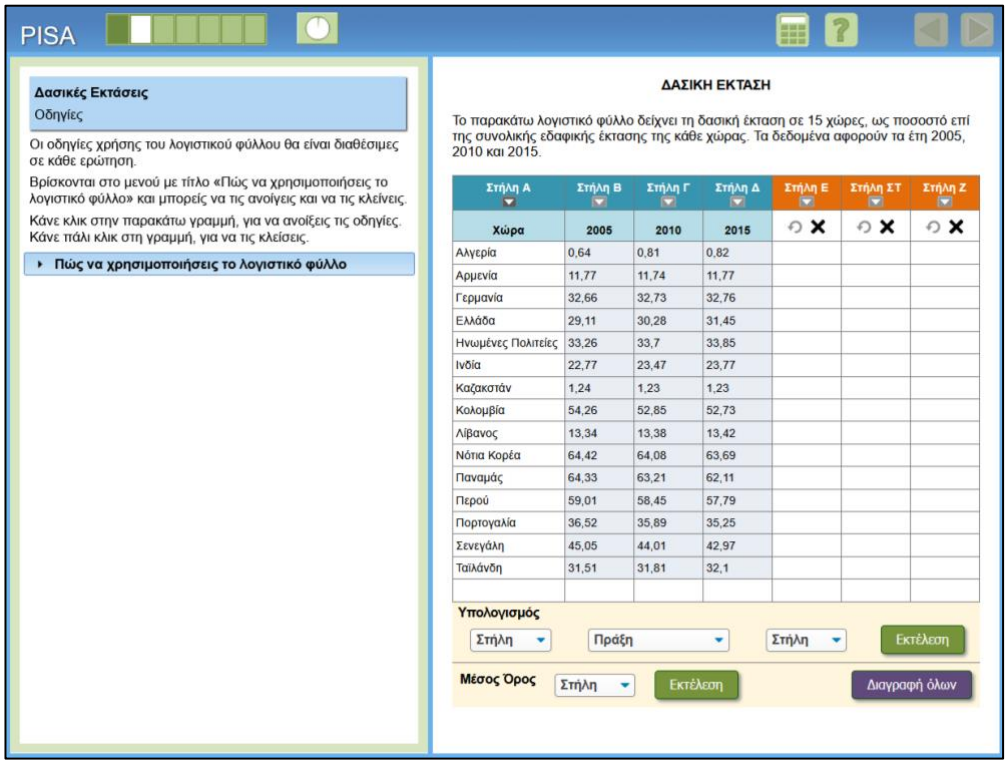
https://pisa2022-questions.oecd.org/platform/index.html?user=&unit=MAT/MA161-ForestedAreas&lang=ell-GRC



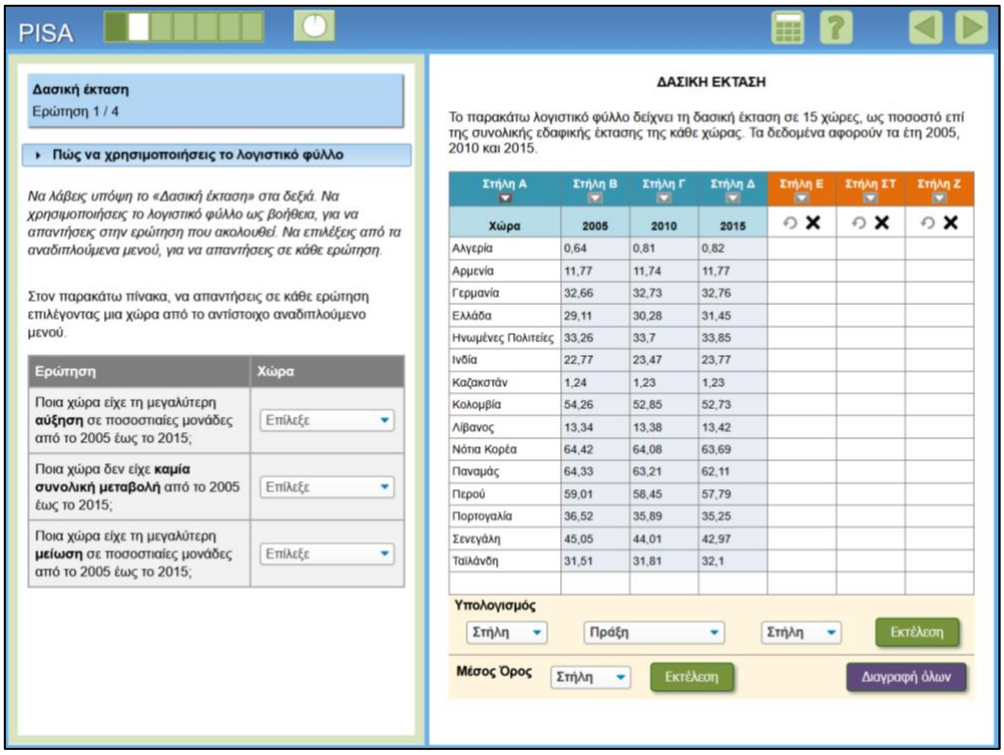
Εισαγωγή


PISA
Δασική έκταση
Εισαγωγή
Να διαβάσεις την εισαγωγή. Μετά κάνε κλικ στο βελάκι ΕΠΟΜΕΝΟ.
ΔΑΣΙΚΗ ΕΚΤΑΣΗ
Σε αυτό το θέμα πρέπει να χρησιμοποιήσεις ένα λογιστικό φύλλο, για να απαντήσεις σε ερωτήσεις σχετικά με την παρακάτω περίσταση:
Το δάσος είναι ένα οικοσύστημα, στο οποίο υπάρχει ποικιλία δένδρων, φυτών και ζώων.
Το μέγεθος της δασικής έκτασης σε μια χώρα μπορεί να αλλάξει με την πάροδο του χρόνου.
Στην επόμενη οθόνη, μπορείς να εξασκηθείς στη χρήση του λογιστικού φύλλου.


PISA
Δασική έκταση
Εξάσκηση
Μπορείς να εξασκηθείς στη χρήση του λογιστικού φύλλου, πριν περάσεις στις ερωτήσεις.
Να χρησιμοποιήσεις το λογιστικό φύλλο, για να κάνεις τις τρεις επόμενες ενέργειες.
1. Ταξινόμηση στήλης.
Κάνε κλικ στο σύμβολο στη Στήλη Β, Γ ή Δ, για να ταξινομήσεις αυτήν τη στήλη κατά αύξουσα σειρά (από το μικρότερο στο μεγαλύτερο).
Παρατήρησε ότι, όταν ταξινομούμε μια στήλη, τα δεδομένα των άλλων στηλών ακολουθούν τα αντίστοιχα της στήλης που ταξινομήθηκε.
ΔΑΣΙΚΗ ΕΚΤΑΣΗ
Το παρακάτω λογιστικό φύλλο δείχνει τη δασική έκταση σε 15 χώρες, ως ποσοστό επί της συνολικής εδαφικής έκτασης της κάθε χώρας. Τα δεδομένα αφορούν τα έτη 2005, 2010 και 2015.
Στήλη Α
Στήλη Β
Στήλη Γ
Στήλη Δ
Στήλη Ε
Στήλη ΣΤ
Στήλη Ζ
Χώρα
2005
2010
2015
Αλγερία 0,64 0,81 0,82
Αρμενία 11,77 11,74 11,77
Γερμανία 32,66 32,73 32,76
Ελλάδα 29,11 30,28 31,45
Ηνωμένες Πολιτείες 33,26 33,7 33,85
Ινδία 22,77 23,47 23,77
Καζακστάν 1,24 1,23 1,23
Κολομβία 54,26 52,85 52,73
Λίβανος 13,34 13,38 13,42
Νότια Κορέα 64,42 64,08 63,69
Παναμάς 64,33 63,21 62,11
Περού 59,01 58,45 57,79
Πορτογαλία 36,52 35,89 35,25
Σενεγάλη 45,05 44,01 42,97
Ταϊλάνδη 31,51 31,81 32,1
Υπολογισμός
Στήλη
Πράξη
Στήλη
Εκτέλεση
Μέσος Όρος
Στήλη
Εκτέλεση
Διαγραφή όλων



Ερώτηση 1



διεργασία	διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά
μαθηματικό περιεχόμενο	αβεβαιότητα και δεδομένα
πλαίσιο	κοινωνικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	5 (4 για τις μερικώς αποδεκτές απαντήσεις)

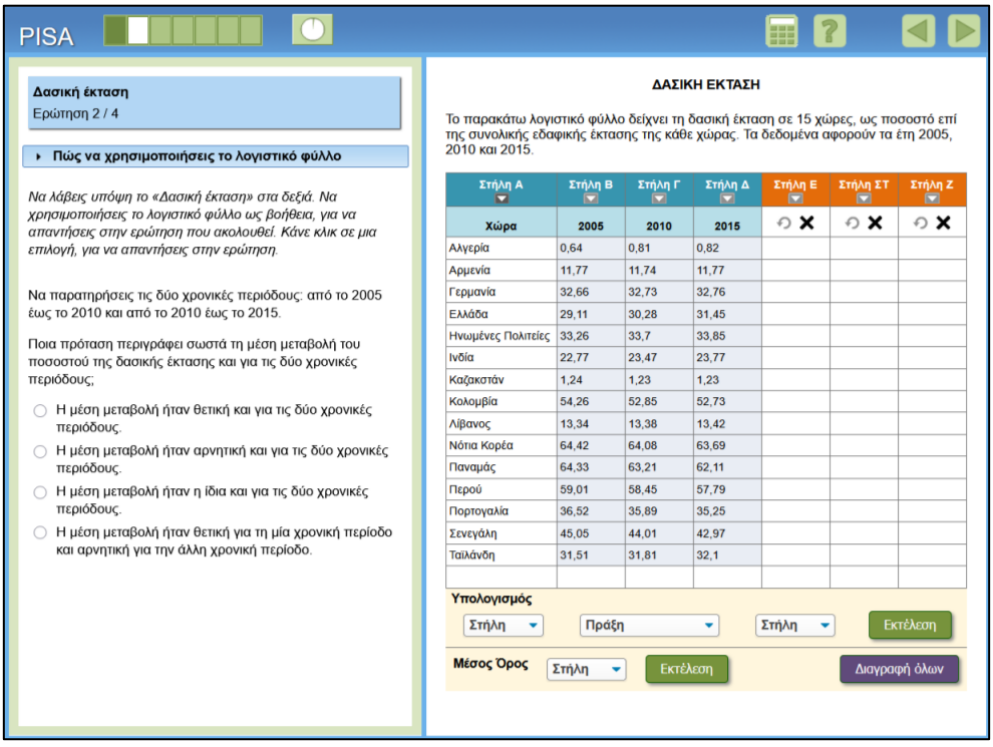
Η διεργασία είναι η διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά, εφόσον τα παιδιά καλούνται να διαμορφώσουν μια στρατηγική προκειμένου να αξιοποιήσουν τις πληροφορίες, για να επιλέξουν τις χώρες που ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η αβεβαιότητα και τα δεδομένα, αφού τα παιδιά καλούνται να αλληλεπιδράσουν με στατιστικά δεδομένα σε μορφή λογιστικού φύλλου.

Το πλαίσιο είναι κοινωνικό, αφού αναφέρεται σε θέμα (έκταση των δασών) που άπτεται περιβαλλοντικών προβλημάτων.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 5, διότι οι μαθητές καλούνται να εργαστούν με ένα μοντέλο για μια περίπλοκη κατάσταση καθορίζοντας υποθέσεις: πρέπει να επιλέξουν πώς θα συνδυάσουν τις πληροφορίες που δίνονται στις στήλες (ποιες πράξεις θα κάνουν μεταξύ ποιων στηλών) και πώς θα ερμηνεύσουν τα συμπεράσματα που προκύπτουν σε σχέση με το πλαίσιο ενός πραγματικού προβλήματος.

Ερώτηση 2



διεργασία	ερμηνεία
μαθηματικό περιεχόμενο	αβεβαιότητα και δεδομένα
πλαίσιο	κοινωνικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	5

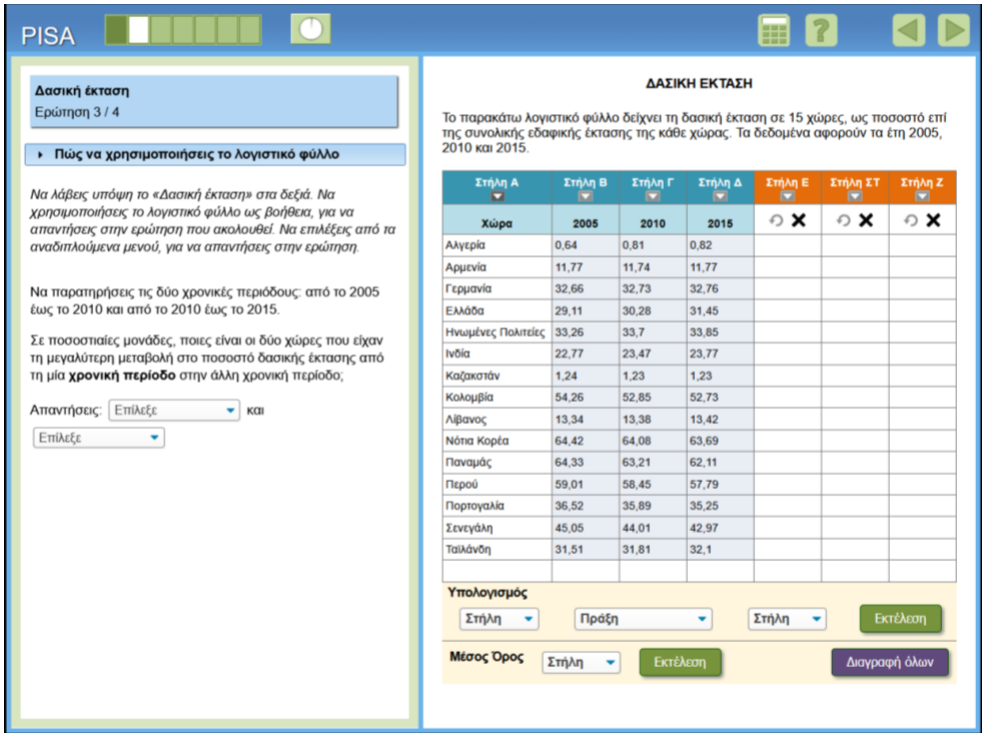
Η διεργασία είναι η ερμηνεία, εφόσον τα παιδιά καλούνται να ερμηνεύσουν και να αξιολογήσουν ισχυρισμούς ως προς το αν προκύπτουν από τα δεδομένα.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η αβεβαιότητα και τα δεδομένα, αφού τα παιδιά καλούνται να κρίνουν ισχυρισμούς με βάση στατιστικά δεδομένα σε μορφή λογιστικού φύλλου.

Το πλαίσιο είναι κοινωνικό, αφού αναφέρεται σε θέμα (έκταση των δασών) που άπτεται περιβαλλοντικών προβλημάτων.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 5, διότι οι μαθητές καλούνται να εργαστούν με ένα μοντέλο για μια περίπλοκη κατάσταση εφαρμόζοντας μια καλά σχεδιασμένη στρατηγική επίλυσης (να υπολογίσουν τον μέσο όρο και των τριών στηλών) και ερμηνεύοντας τα συμπεράσματα που προκύπτουν σε σχέση με το πλαίσιο ενός πραγματικού προβλήματος.

Ερώτηση 3



διεργασία	ερμηνεία
μαθηματικό περιεχόμενο	αβεβαιότητα και δεδομένα
πλαίσιο	κοινωνικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	6

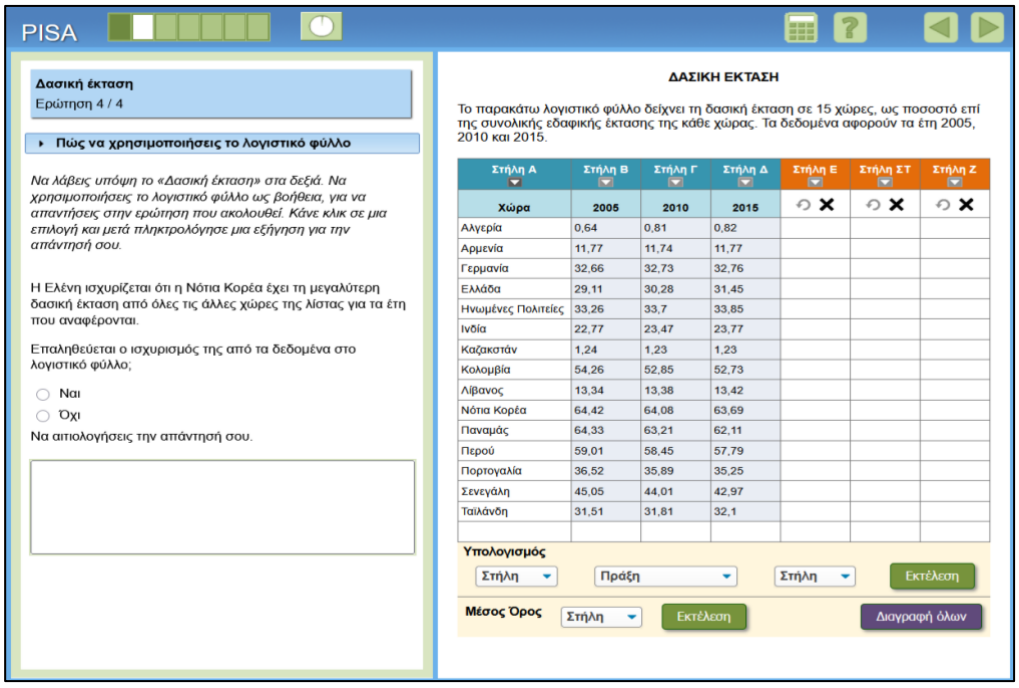
Η διεργασία είναι η ερμηνεία, εφόσον τα παιδιά θα πρέπει να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από κατάλληλη χρήση του λογιστικού φύλλου.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η αβεβαιότητα και τα δεδομένα, αφού τα παιδιά καλούνται να αλληλεπιδράσουν με στατιστικά δεδομένα σε μορφή λογιστικού φύλλου.

Το πλαίσιο είναι κοινωνικό, αφού αναφέρεται σε θέμα (έκταση των δασών) που άπτεται περιβαλλοντικών προβλημάτων.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 6, εφόσον οι μαθητές καλούνται να επινοήσουν στρατηγικές λύσης που απαιτούν ευελιξία στην κατανόηση της έννοιας της μεταβολής (επιλέγοντας τις σωστές στήλες και τις σωστές πράξεις για τις στήλες αυτές). Πρέπει να αναγνωρίσουν πότε μια διαδικασία που δεν προσδιορίζεται στο πρόβλημα μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα μη τυποποιημένο πλαίσιο· να συνδέσουν διαφορετικές πηγές πληροφοριών (δεδομένα σε διαφορετικές στήλες) ως μέρος της λύσης τους· επίσης, να αναλογιστούν την καταλληλότητα των ενεργειών τους σε σχέση με τη λύση τους και την αρχική κατάσταση.

Ερώτηση 4



διεργασία	μαθηματικός συλλογισμός
μαθηματικό περιεχόμενο	αβεβαιότητα και δεδομένα
πλαίσιο	κοινωνικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	6

Η διεργασία είναι ο μαθηματικός συλλογισμός, εφόσον τα παιδιά καλούνται να επινοήσουν μια στρατηγική για να αξιολογήσουν έναν ισχυρισμό και να αιτιολογήσουν την αξιολόγησή τους.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η αβεβαιότητα και τα δεδομένα, αφού τα παιδιά καλούνται να αξιοποιήσουν στατιστικά δεδομένα σε μορφή λογιστικού φύλλου.

Το πλαίσιο είναι κοινωνικό, αφού αναφέρεται σε θέμα (έκταση των δασών) που άπτεται περιβαλλοντικών προβλημάτων.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 6, διότι οι μαθητές καλούνται να επινοήσουν στρατηγικές λύσης που απαιτούν ευελιξία στην κατανόηση των εννοιών της ποσοστιαίας δασικής κάλυψης και της δασικής κάλυψης και της μεταξύ τους διαφοράς. Επίσης, να αναγνωρίσουν πότε μια διαδικασία που δεν προσδιορίζεται στο πρόβλημα μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα μη τυποποιημένο πλαίσιο.

Η παραπάνω ερώτηση απαιτεί μια απάντηση ανοικτού τύπου. Ο οδηγός κωδικοποίησης των απαντήσεων φαίνεται παρακάτω.

Αποδεκτή απάντηση

Ο/Η μαθητής/τρια επιλέγει «Όχι» και εξηγεί ότι το λογιστικό φύλλο δείχνει μόνο το ποσοστό της δασικής έκτασης, ή ότι το λογιστικό φύλλο δεν δείχνει τη συνολική εδαφική έκταση της κάθε χώρας, ή ότι η έκταση κάθε χώρας είναι διαφορετική.

- [Όχι] Αυτό δεν ισχύει επειδή το λογιστικό φύλλο δείχνει τις τιμές μόνο ως ποσοστά.
- Ο ισχυρισμός της δεν επαληθεύεται από τα δεδομένα στο υπολογιστικό φύλλο, επειδή δεν γνωρίζουμε τη συνολική εδαφική έκταση των χωρών της λίστας. [Εδώ εννοείται το «Όχι».]
- [Όχι] Επειδή η συνολική εδαφική έκταση κάθε χώρας είναι διαφορετική.
- [Όχι] Δεν έχουν την ίδια έκταση όλες οι χώρες.

Μη αποδεκτή απάντηση

Άλλες απαντήσεις που περιλαμβάνουν την επιλογή «Όχι», αλλά με μία λανθασμένη ή καμία αιτιολόγηση, ή την επιλογή «Ναι» με ή χωρίς αιτιολόγηση.

- [Όχι].

- [Όχι] Επειδή είναι διαφορετική.
- [Ναι] Η Νότια Κορέα έχει τη μεγαλύτερη έκταση για κάθε χρονιά που προτείνεται στη λίστα.

2.5.7. Συγκέντρωση φαρμάκων στο αίμα

https://skills4life.gr/themata/M/M_70/story.html

Ερώτηση 1



διεργασία	διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά
μαθηματικό περιεχόμενο	ποσότητα
πλαίσιο	επιστημονικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	3

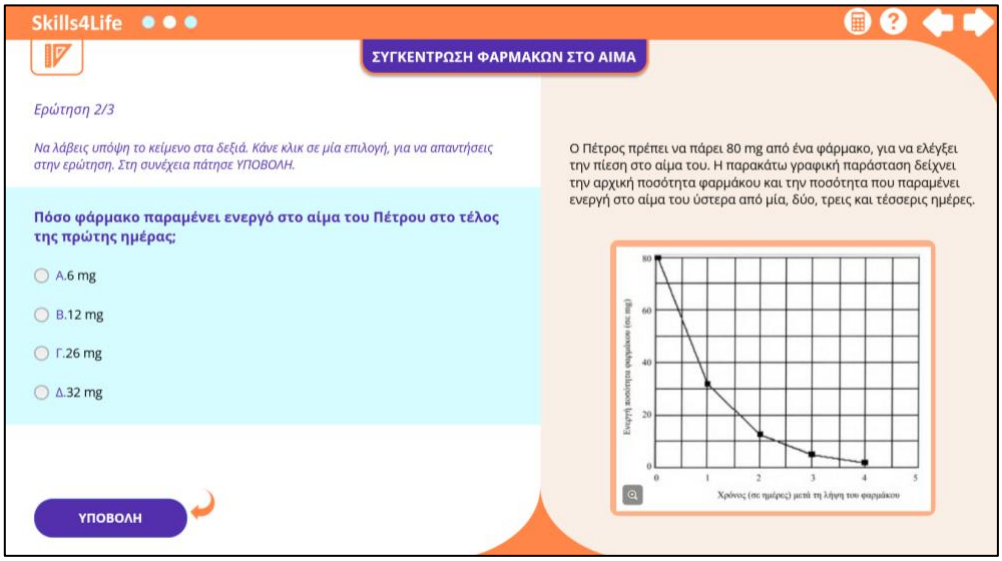
Η διεργασία είναι η διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά, εφόσον τα παιδιά θα πρέπει να μεταφράσουν το πρόβλημα σε μαθηματική γλώσσα, ώστε να διαμορφώσουν μια στρατηγική (τους διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με το 60%) για την επίλυσή του.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η ποσότητα, αφού κυριαρχούν οι υπολογισμοί ποσοτήτων.

Το πλαίσιο είναι επιστημονικό, αφού προέρχεται από το πεδίο της φαρμακολογίας (ή ευρύτερα των επιστημών υγείας).

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 3, διότι οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν έναν πίνακα χρησιμοποιώντας πληροφορίες που είναι σαφώς διατυπωμένες και κάνοντας υπολογισμούς που δεν ορίζονται με σαφήνεια στη διατύπωση του προβλήματος. Για τον σκοπό αυτό θα πρέπει να έχουν την ικανότητα να χειριστούν ποσοστά και να τα εφαρμόσουν διαδοχικά στους υπολογισμούς τους.

Ερώτηση 2



διεργασία	ερμηνεία
μαθηματικό περιεχόμενο	αλλαγή και σχέσεις
πλαίσιο	επιστημονικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	2

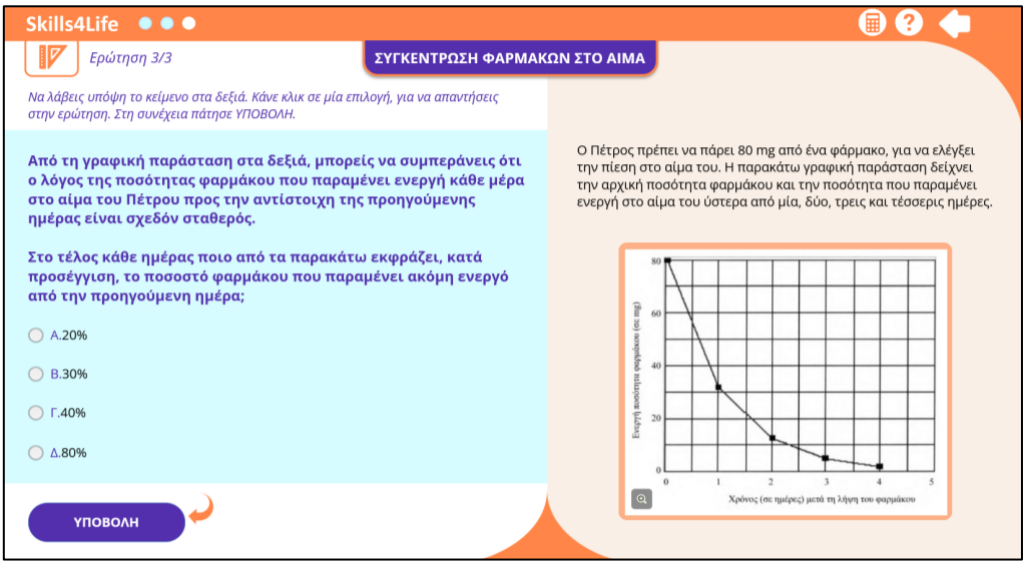
Η διεργασία είναι η ερμηνεία, εφόσον τα παιδιά καλούνται να ερμηνεύσουν διάγραμμα που τους δίνεται, ώστε να απαντήσουν στην ερώτηση.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η αλλαγή και σχέσεις, αφού κυριαρχεί η συναρτησιακή σχέση μεταξύ του χρόνου και της ποσότητας του φαρμάκου.

Το πλαίσιο είναι επιστημονικό, αφού προέρχεται από το πεδίο της φαρμακολογίας (ή ευρύτερα των επιστημών υγείας).

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 2, εφόσον οι μαθητές καλούνται να εξαγάγουν πληροφορίες από πηγές που χρησιμοποιούν ελαφρώς πιο σύνθετους τρόπους αναπαράστασης, όπως το γράφημα. Χρειάζεται να κατανοούν βασικά στοιχεία συναρτησιακών σχέσεων (ανάμεσα στον χρόνο και την ενεργή ποσότητα φαρμάκου).

Ερώτηση 3



διεργασία	ερμηνεία
μαθηματικό περιεχόμενο	αλλαγή και σχέσεις
πλαίσιο	επιστημονικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	4

Η διεργασία είναι η ερμηνεία, εφόσον τα παιδιά καλούνται να ερμηνεύσουν διάγραμμα που τους δίνεται, ώστε να αντλήσουν τις απαραίτητες πληροφορίες και με την επεξεργασία τους θα μπορέσουν να απαντήσουν στην ερώτηση.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι η αλλαγή και σχέσεις, αφού στο επίκεντρο του ζητούμενου είναι η κατανόηση της συναρτησιακής σχέσης μεταξύ του χρόνου και της ποσότητας του φαρμάκου.

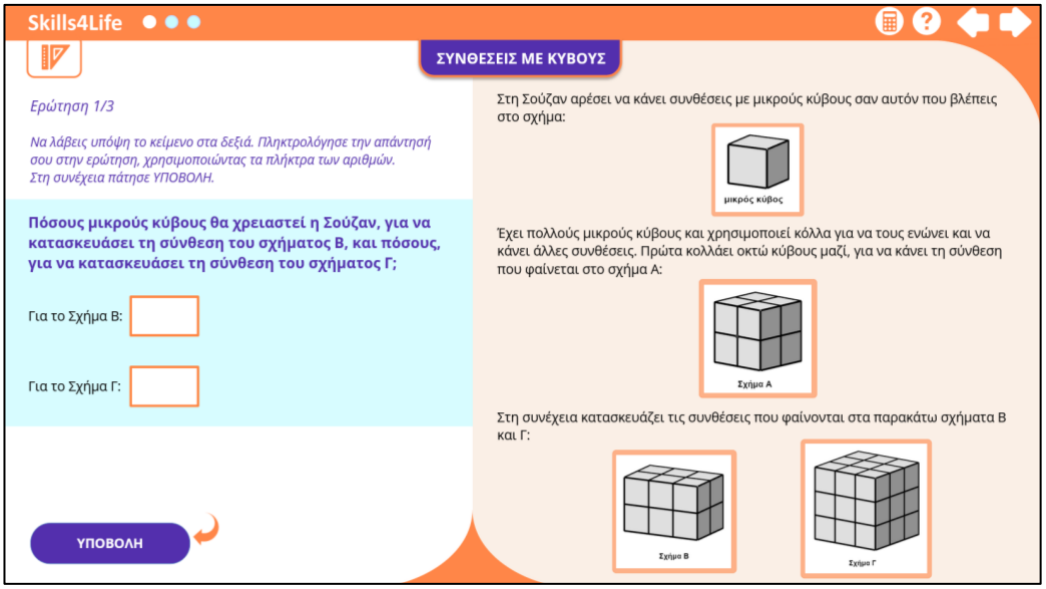
Το πλαίσιο είναι επιστημονικό, αφού προέρχεται από το πεδίο της φαρμακολογίας (ή ευρύτερα των επιστημών υγείας).

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 4, εφόσον οι μαθητές καλούνται να εργαστούν αποτελεσματικά με ένα μοντέλο για μια πολύπλοκη κατάσταση που περιλαμβάνει δύο μεταβλητές (ποσότητα – χρόνος), και να χρησιμοποιήσουν εκλεπτυσμένη υπολογιστική σκέψη, για να κρίνουν ότι το ποσοστό που ζητείται είναι ο λόγος της ποσότητας φαρμάκου στο τέλος της πρώτης μέρα προς την ποσότητα στην αρχή της, και ότι ο λόγος αυτός είναι σταθερός.

2.5.8. Συνθέσεις με κύβους

https://skills4life.gr/themata/M/M_74/story.html

Ερώτηση 1



διεργασία	διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά
μαθηματικό περιεχόμενο	χώρος και σχήμα
πλαίσιο	προσωπικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	2

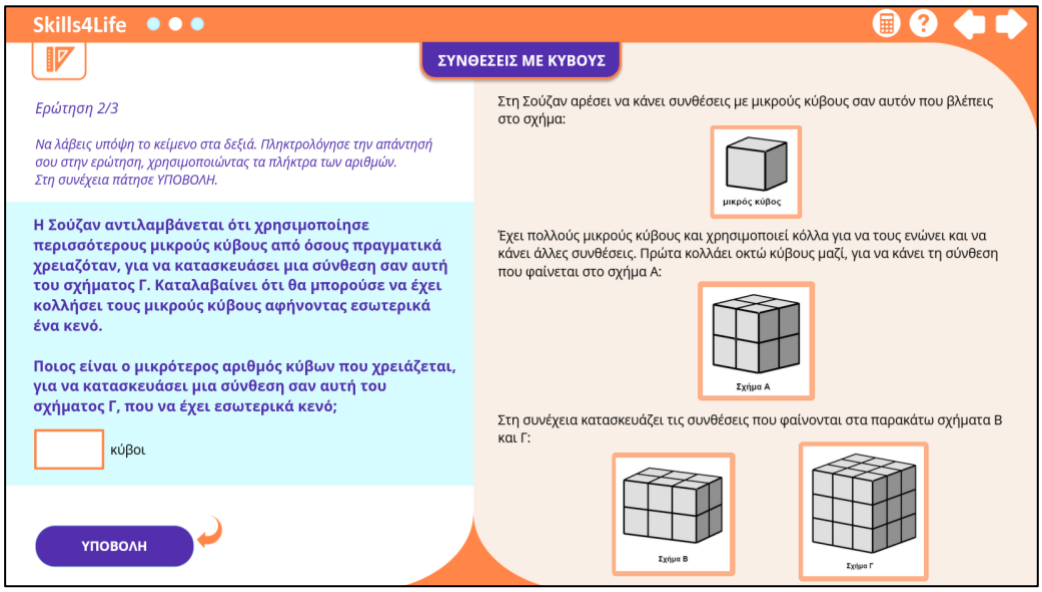
Η διεργασία είναι η διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά, εφόσον τα παιδιά καλούνται να κατανοήσουν τα σχήματα που δίνονται και να συμπεράνουν τον αριθμό των κύβων.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι ο χώρος και το σχήμα, αφού το πρόβλημα εστιάζει στην οπτικοποίηση στερεών (τριών διαστάσεων) που είναι σχεδιασμένα σε δύο διαστάσεις.

Το πλαίσιο είναι προσωπικό, αφού αναφέρεται σε δραστηριότητα (ενδιαφέροντα) του ατόμου.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 2, διότι οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν μια απλή στρατηγική (να μετρήσουν τους κύβους στα δύο σχήματα, είτε φαίνονται είτε όχι). Πρέπει να μπορούν, δηλαδή, να εξαγάγουν σχετικές πληροφορίες από δισδιάστατες αναπαραστάσεις τρισδιάστατων αντικειμένων.

Ερώτηση 2



διεργασία	μαθηματικός συλλογισμός
μαθηματικό περιεχόμενο	χώρος και σχήμα
πλαίσιο	προσωπικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	4

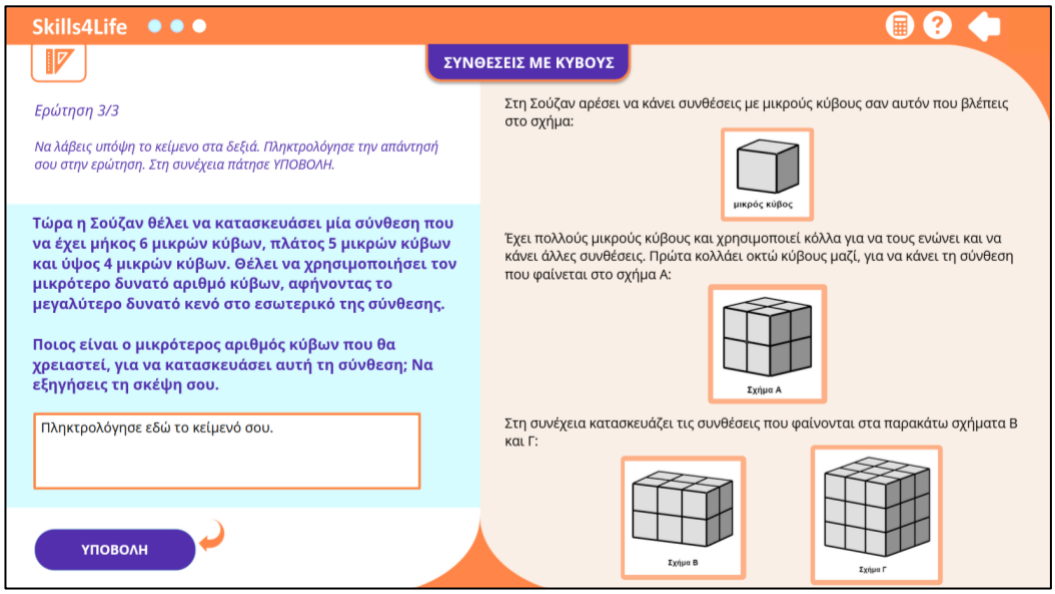
Η διεργασία είναι ο μαθηματικός συλλογισμός, εφόσον τα παιδιά καλούνται να αξιοποιήσουν τη δομή των σχημάτων που δίνονται και να ακολουθήσουν συγκεκριμένους περιορισμούς για να συμπεράνουν τον μικρότερο αριθμό των κύβων που απαιτούνται.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι ο χώρος και το σχήμα, αφού το πρόβλημα εστιάζει στην οπτικοποίηση στερεών (τριών διαστάσεων) και στη δομή τους.

Το πλαίσιο είναι προσωπικό, αφού αναφέρεται σε δραστηριότητα (ενδιαφέροντα) του ατόμου.

Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 4, διότι οι μαθητές καλούνται να εργαστούν με ένα ξεκάθαρο μοντέλο για μια πολύπλοκη συγκεκριμένη κατάσταση, όπως είναι η αναπαράσταση του Σχήματος Γ. Επίσης, να επιδείξουν αναπτυγμένη χωρική αντίληψη για την αφαίρεση κύβου από το εσωτερικό ενός τρισδιάστατου αντικειμένου, που αναπαρίσταται στις δύο διαστάσεις.

Ερώτηση 3



διεργασία	μαθηματικός συλλογισμός
μαθηματικό περιεχόμενο	χώρος και σχήμα
πλαίσιο	προσωπικό
επίπεδο μαθηματικής επάρκειας	6

Η διεργασία είναι ο μαθηματικός συλλογισμός, εφόσον τα παιδιά καλούνται να αξιοποιήσουν τη δομή των σχημάτων που δίνονται, για να γενικεύσουν σε σχήμα που περιγράφεται, αλλά του οποίου η εικόνα δεν περιλαμβάνεται.

Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι ο χώρος και το σχήμα, αφού το πρόβλημα εστιάζει στην οπτικοποίηση στερεών (τριών διαστάσεων) και στη δομή τους.

Το πλαίσιο είναι προσωπικό, αφού αναφέρεται σε δραστηριότητα (ενδιαφέροντα) του ατόμου.

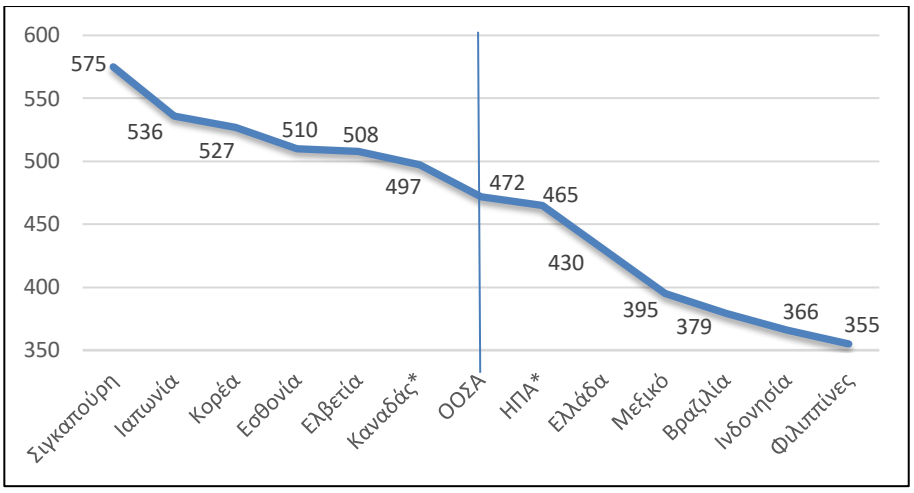
Το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας είναι το 6, διότι οι μαθητές καλούνται να επιδείξουν δημιουργικότητα κι ευέλικτη σκέψη, για να αναπτύξουν μια λύση, καθώς για να απαντήσουν πρέπει σε κάθε περίπτωση να έχουν αναπτυγμένη χωρική αντίληψη. Επίσης, πρέπει να αναγνωρίσουν τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να αφαιρεθεί ο μέγιστος αριθμός κύβων, ώστε η κατασκευή να χρειάζεται τον ελάχιστο αριθμό κύβων.

Κεφάλαιο 3: Οι αδυναμίες των μαθητών στην Ελλάδα στα Μαθηματικά όπως καταγράφονται από την έρευνα PISA

3.1 Εισαγωγή

Τα αποτελέσματα του προγράμματος PISA αναδεικνύουν συστηματικά τις προκλήσεις που αντιμετωπίζει η μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα. Η επίδοση των μαθητών της Ελλάδας παραμένει σημαντικά χαμηλότερη από τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ και παρουσιάζει διαχρονικά πτωτική πορεία (OECD, 2023a). Το φαινόμενο αυτό δεν περιορίζεται σε συγκεκριμένες περιοχές της μαθηματικής γνώσης, αλλά συνδέεται κυρίως με τη **δυσκολία εφαρμογής των Μαθηματικών σε πραγματικά πλαίσια**, με **την αξιοποίηση της γνώσης από τη θεωρία στην πράξη**, και με **την αδυναμία συγκρότησης σαφούς μαθηματικού λόγου και επιχειρηματολογίας** (OECD, 2023b).

Παράλληλα, η μεγάλη μερίδα μαθητών που δεν φτάνει στο ελάχιστο επίπεδο επάρκειας μαθηματικού εγγραμματισμού (Επίπεδο 2), η περιορισμένη παρουσία κορυφαίων επιδόσεων και οι έντονες κοινωνικο-οικονομικές ανισότητες συνθέτουν ένα προφίλ σημαντικών προκλήσεων για το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Η κατανόηση αυτών των αδυναμιών, όπως αναδεικνύεται τόσο από τα στατιστικά στοιχεία του PISA όσο και από την εμπειρία κωδικοποιητών, αποτελεί κρίσιμο πρώτο βήμα για τον αναστοχασμό και την ενίσχυση της διδασκαλίας του μαθήματος των Μαθηματικών στη χώρα.

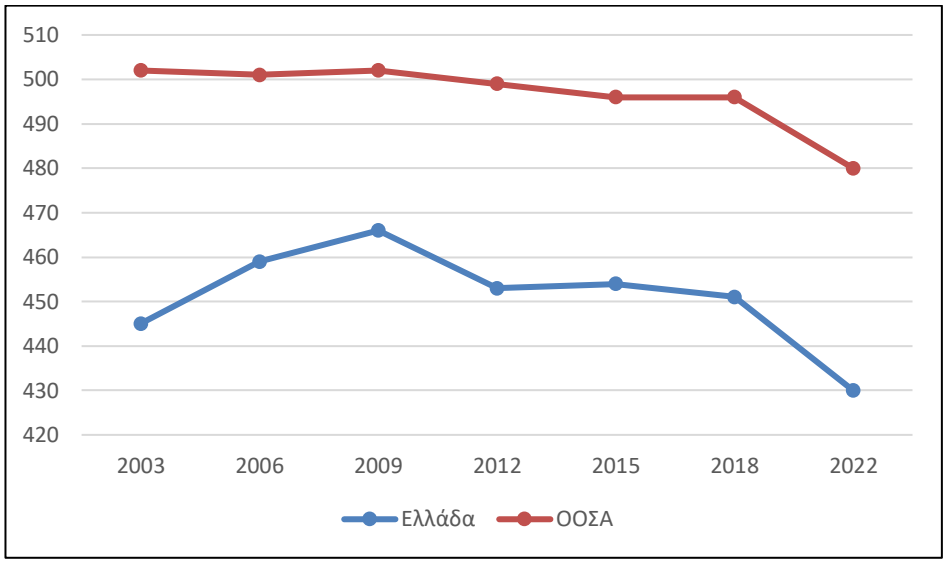


Γράφημα 1: Μέση επίδοση στα Μαθηματικά στο PISA 2022

Σημείωση: Στις χώρες σύγκρισης περιλαμβάνονται οι 6 χώρες με τις υψηλότερες επιδόσεις στα Μαθηματικά και οι 5 χώρες με τον μεγαλύτερο πληθυσμό 15χρονων μαθητών

3.2 Χαμηλή συνολική επίδοση και καθοδική πορεία

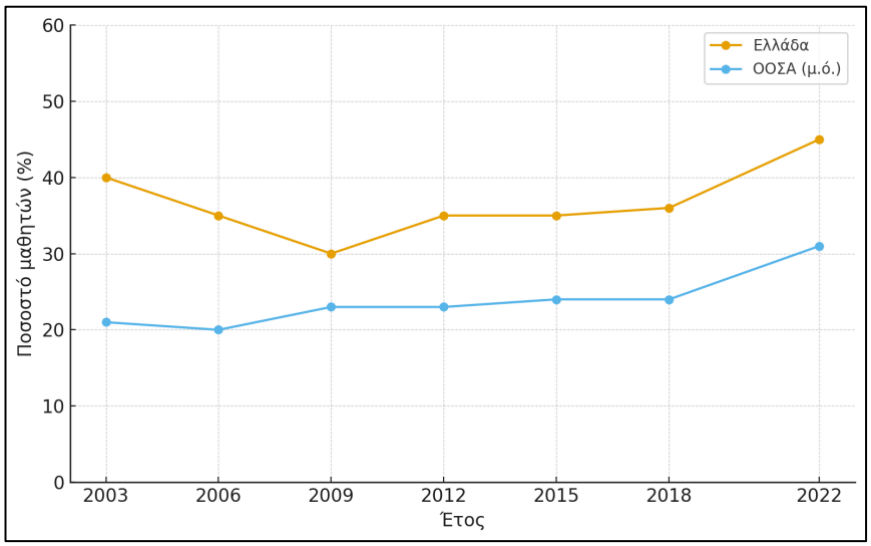
Η συνολική επίδοση των μαθητών της Ελλάδας είναι χαμηλή και παρουσιάζει διαχρονικά καθοδική τάση. Το 2022, η μέση επίδοση στα Μαθηματικά ανήλθε στις 430 μονάδες, ενώ ο μέσος όρος του ΟΟΣΑ ήταν οι 472 μονάδες (OECD, 2023a). Η μακροχρόνια παρακολούθηση των αποτελεσμάτων δείχνει σταδιακή επιδείνωση της επίδοσης της Ελλάδας. Σε όλα τα έτη συμμετοχής της στη διεθνή αξιολόγηση, από το 2000 έως και το 2022, η μέση βαθμολογία των μαθητών της στον μαθηματικό εγγραμματισμό ήταν σταθερά κάτω από τον μέσο όρο των χωρών του ΟΟΣΑ, με στατιστικά σημαντική διαφορά. Αξίζει να σημειωθεί ότι η πορεία δεν ήταν απολύτως γραμμική, καθώς το 2009 καταγράφηκε μία μικρή βελτίωση, η οποία χαρακτηρίστηκε από τον ΟΟΣΑ ως «καμπυλόσχημη» (hump-shaped) εξέλιξη (OECD, 2010). Ωστόσο, η τάση αυτή δεν διατηρήθηκε και στους επόμενους κύκλους παρατηρήθηκε υποχώρηση. Στο δεκαετές διάστημα 2012-2022, η μείωση φτάνει τις 22,5 μονάδες, ενώ μεταξύ 2018-2022 η πτώση είναι 21,2 μονάδες (OECD, 2023a, 2023b). Σύμφωνα με τον ΟΟΣΑ, μια διαφορά της τάξης των 38 έως 40 μονάδων PISA αντιστοιχεί ενδεικτικά σε ένα σχολικό έτος φοίτησης. Αν και η εκτίμηση αυτή δεν είναι απόλυτα ακριβής, χρησιμοποιείται συχνά ως ενδεικτική για τη σύγκριση διαφορών στις μέσες επιδόσεις (OECD, 2019b). Συνεπώς, η πρόσφατη υποχώρηση στις επιδόσεις των μαθητών της Ελλάδας συνιστά μια σημαντική μαθησιακή απώλεια, η οποία ισοδυναμεί περίπου με μισό σχολικό έτος.



Γράφημα 2: PISA - Μαθηματικά: Εξέλιξη επιδόσεων (2003-2022)

3.3 Μεγάλο ποσοστό μαθητών χωρίς το στοιχειώδες επίπεδο μαθηματικού εγγραμματισμού

Σύμφωνα με τα πιο πρόσφατα δεδομένα του PISA 2022, το 53% των Ελλήνων μαθητών πέτυχε τουλάχιστον το Επίπεδο 2 επάρκειας στα Μαθηματικά, ποσοστό χαμηλότερο από τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ (69%) (OECD, 2023a). Παράλληλα, το 47,2% των μαθητών στην Ελλάδα παρέμεινε κάτω από το Επίπεδο 2,[4] το οποίο θεωρείται το ελάχιστο επίπεδο επάρκειας που θα πρέπει να έχουν κατακτήσει όλοι οι μαθητές μέχρι την ολοκλήρωση της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, προκειμένου να είναι σε θέση να ανταποκρίνονται στις προκλήσεις της σύγχρονης ζωής ή, με άλλα λόγια, να είναι στοιχειωδώς λειτουργικά μαθηματικώς εγγράμματοι (European Commission, 2023, Schleicher, 2023). Το αντίστοιχο ποσοστό για την Ευρωπαϊκή Ένωση ανέρχεται σε 29,5%, γεγονός που δείχνει ότι η Ελλάδα καταγράφει υψηλότερη αναλογία μαθητών με επιδόσεις κάτω από το στοιχειώδες επίπεδο μαθηματικής επάρκειας. Από το 2012 ως το 2022, το ποσοστό μαθητών κάτω από το Επίπεδο 2 αυξήθηκε κατά 11,5 ποσοστιαίες μονάδες (βλ. σχετικά Γράφημα 3).



Γράφημα 3: Ποσοστό μαθητών κάτω από το επίπεδο 2 στα Μαθηματικά

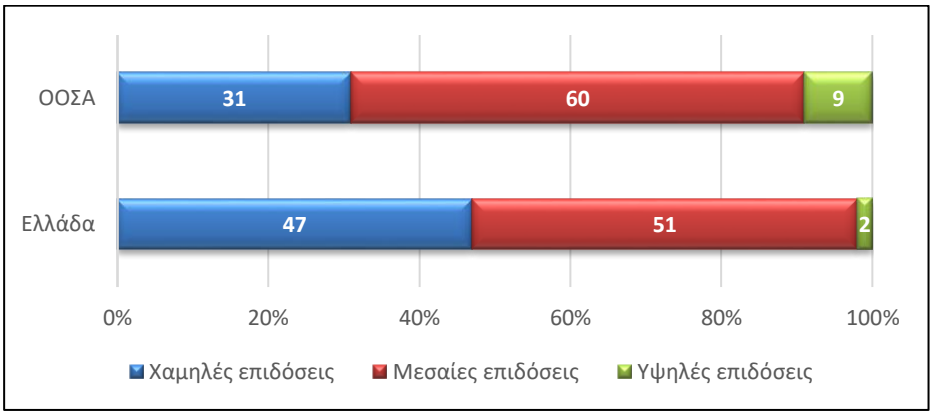
Τα δεδομένα αυτά αναδεικνύουν τη σημασία της ενίσχυσης των βασικών δεξιοτήτων μαθηματικού εγγραμματισμού, οι οποίες αποτελούν προϋπόθεση για την καθημερινή ζωή και την ενεργή κοινωνική συμμετοχή. Αξίζει να σημειωθεί ότι το Επίπεδο 2 του PISA έχει αναγνωριστεί διεθνώς, τόσο από τον ΟΟΣΑ όσο και από τον ΟΗΕ και την UNESCO, ως το

[4] Οι μαθητές που βρίσκονται στο Επίπεδο 2 μπορούν να χρησιμοποιούν βασικούς αλγόριθμους, απλές επιστημονικές γνώσεις και να ερμηνεύουν απλά κείμενα (Schleicher, 2023).

ελάχιστο επίπεδο μαθηματικού εγγραμματισμού που πρέπει να έχει κατακτήσει κάθε μαθητής με την ολοκλήρωση της υποχρεωτικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (OECD, 2019c).

3.4 Απουσία κορυφαίων επιδόσεων

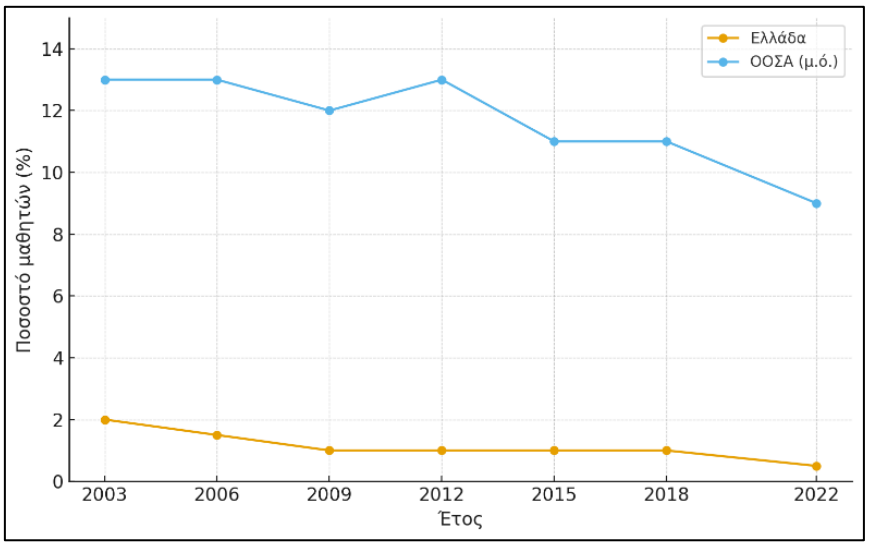
Σε ό,τι αφορά τις υψηλότερες επιδόσεις, το 2% των μαθητών της Ελλάδας πέτυχαν επιδόσεις οι οποίες αντιστοιχούν στο επίπεδο 5 ή 6[5] στο PISA 2022, ενώ ο αντίστοιχος μέσος όρος του ΟΟΣΑ ανέρχεται σε 9% (OECD, 2023a). Οι μαθητές που κατατάσσονται σε αυτά τα επίπεδα είναι σε θέση να μοντελοποιούν σύνθετες καταστάσεις, να συγκρίνουν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και να αξιοποιούν δημιουργικά τις μαθηματικές τους γνώσεις (βλ. Γράφημα 4).



Γράφημα 4: Μαθητές με υψηλές επιδόσεις και χαμηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά στο PISA 2022

Επιπλέον, την περίοδο 2012–2022 καταγράφεται μείωση των κορυφαίων επιδόσεων κατά 1,9 μονάδες (OECD, 2023a). Παράλληλα, όπως φαίνεται στο Γράφημα 5, η Ελλάδα υστερεί σημαντικά σε μαθητικό δυναμικό υψηλών επιπέδων μαθηματικού εγγραμματισμού έναντι του μέσου όρου του ΟΟΣΑ. Με δεδομένο τον κεντρικό ρόλο των Μαθηματικών στην προαγωγή της επιστήμης και της τεχνολογίας, είναι σαφές ότι μεσο-μακροπρόθεσμα η διαρκής απομείωση μαθητών με υψηλές μαθηματικές δυνατότητες θα έχει αρνητικές συνέπειες στη θέση της χώρας στον παγκόσμιο επιστημονικό και τεχνολογικό καταμερισμό εργασίας.

[5] Οι μαθητές που φτάνουν στο Επίπεδο 5 ή 6 μπορούν να εργάζονται αποτελεσματικά με μαθηματικά μοντέλα σε σύνθετες καταστάσεις, να κατανοούν αφηρημένα κείμενα και να ερμηνεύουν και να αξιολογούν πολύπλοκα πειράματα (Schleicher, 2023).



Γράφημα 5: Διαχρονική εξέλιξη του ποσοστού μαθητών με υψηλές επιδόσεις (επιπέδου 5 και 6) στα Μαθηματικά του PISA (2003-2022)

3.5 Αδυναμίες των μαθητών στο μαθηματικό περιεχόμενο

Τα αποτελέσματα του PISA 2022 αναδεικνύουν ότι οι μαθητές της Ελλάδας υστερούν σε όλες τις κατηγορίες μαθηματικού περιεχομένου σε σχέση με τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ. Η χαμηλότερη επίδοση καταγράφηκε στην «ποσότητα» (424 μονάδες έναντι 472 του ΟΟΣΑ, διαφορά −48 μονάδες), ακολουθούμενη από τον «χώρο και σχήμα» (429 μονάδες, −42 μονάδες διαφορά από τον ΟΟΣΑ), την «αλλαγή και σχέσεις» (431 μονάδες, −39 μονάδες διαφορά από τον Μ.Ο. του ΟΟΣΑ), και την «αβεβαιότητα και δεδομένα» (435 μονάδες, −39 μονάδες διαφορά από τον ΟΟΣΑ) (OECD, 2023b). Η εικόνα αυτή δείχνει ότι οι αδυναμίες είναι διάχυτες, με εντονότερο πρόβλημα στην κατηγορία της ποσότητας, όπου η Ελλάδα εμφανίζει και τη μεγαλύτερη απόκλιση από τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ.

Πέρα από τις συνολικές επιδόσεις, οι βαθμολογητές (οι ειδικοί που έκαναν την κωδικοποίηση των ανοιχτού τύπου απαντήσεων) του PISA 2022 για το ελληνικό δείγμα εντόπισαν επιπλέον τις εξής χαρακτηριστικές δυσκολίες:

- στην κατηγορία «χώρος και σχήμα» οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να εφαρμόσουν γεωμετρικές προτάσεις (π.χ. Πυθαγόρειο θεώρημα) σε πρακτικά προβλήματα, ενώ
- στην κατηγορία «αβεβαιότητα και δεδομένα» εμφάνισαν αδυναμίες σε ερωτήσεις στην περιοχή της δεσμευμένης πιθανότητας και των περιθωρίων συχνοτήτων.

Παράλληλα, παρατηρήθηκαν σοβαρές δυσκολίες στην παραγωγή γραπτού λόγου, όπως ασυνάρτητες ή αποσπασματικές απαντήσεις και δυσκολία διατύπωσης σαφών και δομημένων επιχειρημάτων.

Η σύγκριση με τα αποτελέσματα του 2012 καταδεικνύει ότι οι μαθητές αντιμετώπιζαν τότε παρόμοιες δυσκολίες, με τη χαμηλότερη επίδοση σε εκείνη τη χρονιά να εντοπίζεται στον «χώρο και σχήμα» (436 μονάδες) και την «αλλαγή και σχέσεις» (446), ενώ ακολουθούσαν οι κατηγορίες της «ποσότητας» (455) και της «αβεβαιότητας και δεδομένων» (460) (OECD, 2014). Το 2022 οι επιδόσεις των μαθητών στις ίδιες κατηγορίες παραμένουν χαμηλές, γεγονός που φανερώνει **μια σταθερή αδυναμία στη χωρική κατανόηση και στις συναρτησιακές σχέσεις, ενώ πλέον η «ποσότητα» έχει επιδεινωθεί και αναδεικνύεται ως το πιο αδύναμο πεδίο**.

Η χαμηλή συνάφεια του περιεχομένου των θεμάτων με τα ισχύοντα Π.Σ. και τα σχολικά βιβλία φαίνεται να αποτελεί σημαντικό παράγοντα δυσκολίας, ιδιαίτερα στα πεδία της «αβεβαιότητας και δεδομένα» (Στατιστική – Πιθανότητες) και της «μεταβολής και σχέσεων». Οι περιοχές αυτές, οι οποίες συνδέονται στενά με την κατανόηση δεδομένων και τη μαθηματική μοντελοποίηση, δεν κατέχουν κεντρική θέση στη διδακτική πράξη, με αποτέλεσμα οι μαθητές να εμφανίζουν περιορισμένη εξοικείωση και δεξιότητες εφαρμογής σε ρεαλιστικά πλαίσια.

3.6 Αδυναμίες των μαθητών στις πτυχές του μαθηματικού συλλογισμού και της επίλυσης προβλήματος

Στις πτυχές του μαθηματικού συλλογισμού και της επίλυσης προβλήματος, το PISA 2022 καταγράφει συστηματικά χαμηλότερες επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών σε σχέση με τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ. Η χαμηλότερη επίδοση σημειώνεται στην **εφαρμογή και χρήση μαθηματικών εννοιών, γεγονότων και διαδικασιών** (421 μονάδες έναντι 472 Μ.Ο. του ΟΟΣΑ, διαφορά −51 μονάδες από τον Μ.Ο. του ΟΟΣΑ), ενώ ακολουθεί η διατύπωση καταστάσεων με μαθηματικό τρόπο (428 μονάδες, διαφορά −41 μονάδες από τον Μ.Ο. του ΟΟΣΑ). Λίγο υψηλότερα είναι τα αποτελέσματα τα οποία αφορούν τις δεξιότητες των μαθητών στον μαθηματικό συλλογισμό (434 έναντι 473, διαφορά −39 μονάδες) και στην

ερμηνεία, εφαρμογή και αξιολόγηση αποτελεσμάτων (435 έναντι 474, διαφορά −39 μονάδες) (OECD, 2023b).

Η σύγκριση με το 2012 δείχνει ότι και τότε οι μαθητές στην Ελλάδα δυσκολεύονταν κυρίως στη *διατύπωση καταστάσεων με μαθηματικό τρόπο* (448 μονάδες) και στην *εφαρμογή διαδικασιών* (449) (OECD, 2014). Το 2022 τα ίδια αυτά πεδία συνεχίζουν να αποτελούν τις πιο αδύναμες πτυχές, με ακόμα μεγαλύτερη πτώση των επιδόσεων. Η διαχρονική αυτή συνέπεια δείχνει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα όταν χρειάζεται να **μεταφέρουν μαθηματικές έννοιες σε πραγματικά προβλήματα** ή να **ενεργοποιήσουν τυπικές διαδικασίες επίλυσης**.

Πέρα από τις ποσοτικές διαφορές, οι βαθμολογητές του PISA 2025 για το δείγμα της Ελλάδας αναφέρουν ως χαρακτηριστική αδυναμία την **περιορισμένη ικανότητα δημιουργίας αλγεβρικών μοντέλων για την περιγραφή πραγματικών καταστάσεων**, η οποία σχετίζεται με τη διεργασία της διατύπωσης καταστάσεων με μαθηματικό τρόπο. Επίσης, υπογραμμίζουν τη δυσκολία των μαθητών να **αναγνωρίζουν πότε και πώς πρέπει να εφαρμόσουν μια γνωστή μαθηματική σχέση (π.χ. τύπο) σε ρεαλιστικό πλαίσιο**, κάτι που συνδέεται με τη διεργασία της εφαρμογής και αξιολόγησης αποτελεσμάτων. Παράλληλα, επισημαίνουν ότι η έλλειψη πρακτικών εμπειριών — όπως η εξοικείωση με πραγματικές καταστάσεις που απαιτούν εκτίμηση αποστάσεων, μεγεθών ή χωρικών σχέσεων — στερεί από τους μαθητές πολύτιμες ευκαιρίες να νοηματοδοτήσουν τα μαθηματικά προβλήματα και να **συνδέσουν τη θεωρητική γνώση με την καθημερινή πράξη**.

Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις των βαθμολογητών των ανοιχτών απαντήσεων των μαθητών του ελληνικού δείγματος του PISA, η διεργασία που φαίνεται να προκαλεί τις μεγαλύτερες δυσκολίες στους μαθητές είναι ο *μαθηματικός συλλογισμός*. Εκτιμάται, όμως, ότι το έλλειμμα αυτό έγκειται στην αδυναμία των μαθητών να **διατυπώσουν με σαφήνεια τη σκέψη τους και να τεκμηριώσουν επαρκώς τον συλλογισμό τους**.

Επιπλέον, σημαντικό ρόλο στις επιδόσεις των μαθητών φαίνεται να έχει και το πλαίσιο εντός του οποίου διατυπώνονται τα θέματα του PISA. Όσο πιο **ανοίκειο και απομακρυσμένο από τις εμπειρίες των μαθητών** είναι το πλαίσιο, όπως για παράδειγμα το επιστημονικό ή το επαγγελματικό πλαίσιο, τόσο μεγαλύτερη δυσκολία παρουσιάζουν στην κατανόηση του προβλήματος και στην επιλογή της κατάλληλης μαθηματικής διεργασίας. Η εξοικείωση με αυθεντικές, ρεαλιστικές καταστάσεις που απαιτούν τη χρήση μαθηματικής σκέψης φαίνεται

να αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για την ανάπτυξη ικανότητας αξιοποίησης της γνώσης και μαθηματικοποίησης πραγματικών προβλημάτων.

Τέλος η στατιστική ανάλυση των επιδόσεων των μαθητών της Ελλάδας συγκριτικά με τις επιδόσεις των μαθητών στις χώρες της Ε.Ε.25 ανέδειξε επιπλέον ως αδυναμία το **είδος της εικονογράφησης** των θεμάτων Μαθηματικών στο PISA. Συγκεκριμένα προέκυψε ότι όσο πιο **τεχνικού χαρακτήρα** είναι η εικονογράφηση (τεχνικό σχεδιάγραμμα, γραφική παράσταση/γράφημα, πίνακας δεδομένων), τόσο περισσότερο φαίνεται να δυσκολεύει τους μαθητές.

3.7 Η επίδραση του κοινωνικο-οικονομικού επιπέδου στις μαθηματικές επιδόσεις

Το κοινωνικο-οικονομικό επίπεδο, όπως ορίζεται από το PISA, είναι μια σύνθετη έννοια που αποτυπώνει το εύρος των οικονομικών, κοινωνικών, πολιτισμικών και άλλων πόρων στους οποίους έχουν πρόσβαση οι μαθητές (OECD, 2019c). Συνδέεται τόσο με τους οικογενειακούς πόρους – όπως το χρηματο-οικονομικό, κοινωνικό, πολιτισμικό και ανθρώπινο κεφάλαιο – όσο και με τη συνολική κοινωνική θέση της οικογένειας. Για την αποτίμησή του χρησιμοποιείται ο δείκτης Οικονομικού, Κοινωνικού και Πολιτισμικού Επιπέδου (ESCS-Economic, Social and Cultural Status), ο οποίος υπολογίζεται με βάση στοιχεία που αφορούν:

α) το μορφωτικό επίπεδο των γονέων,

β) την επαγγελματική τους κατάσταση και

γ) την ύπαρξη οικιακών αγαθών που σχετίζονται τόσο με το οικονομικό (π.χ. κατοχή ηλεκτρονικών συσκευών) όσο και το πολιτισμικό κεφάλαιο της οικογένειας (π.χ. πλήθος βιβλίων στη βιβλιοθήκη του νοικοκυριού).

Όσο υψηλότερη είναι η τιμή του δείκτη ESCS, τόσο υψηλότερο θεωρείται και το κοινωνικο-οικονομικό και πολιτισμικό υπόβαθρο των μαθητών και των οικογενειών τους.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του PISA 2022, το κοινωνικο-οικονομικό υπόβαθρο εξηγεί περίπου 11,8% της διακύμανσης των επιδόσεων στα Μαθηματικά στην Ελλάδα, ποσοστό χαμηλότερο από τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ (15,5%). Αυτό δείχνει ότι το κοινωνικο-οικονομικό και πολιτισμικό επίπεδο επηρεάζει μεν τις επιδόσεις, αλλά η επίδραση είναι σχετικά

ασθενέστερη σε σύγκριση με άλλες χώρες. Ωστόσο, η διαφορά στην επίδοση μεταξύ μαθητών που ανήκουν στο ανώτερο και στο κατώτερο τεταρτημόριο του δείκτη ESCS φθάνει τις 31 μονάδες[6] (OECD: 39), επιβεβαιώνοντας την ύπαρξη σημαντικού χάσματος ανάμεσα στους/στις μαθητές από τα υψηλότερα και τα χαμηλότερα κοινωνικο-οικονομικά στρώματα αντίστοιχα. Ένα 12% των μαθητών που προέρχονται από χαμηλά κοινωνικο-οικονομικά στρώματα επιτυγχάνουν υψηλές επιδόσεις παρά το μειονεκτικό υπόβαθρο από το οποίο προέρχονται (OECD: 10,2).[7] Ωστόσο, η μέση επίδοση των μαθητών χαμηλού ESCS παραμένει χαμηλή (356 μονάδες, OECD: 381).

Οι μαθητές από κοινωνικο-οικονομικά μειονεκτούντα περιβάλλοντα έχουν 64% πιθανότητα να μείνουν κάτω από το Επίπεδο 2, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για όσους προέρχονται από κοινωνικο-οικονομικά προνομιούχα περιβάλλοντα περιορίζεται σε ποσοστό 26,7% (OECD, 2023a; European Commission, 2023).

Παρά τη συνολική μείωση των επιδόσεων την περίοδο 2018–2022, το χάσμα παραμένει σημαντικό: οι κοινωνικο-οικονομικά προνομιούχοι[8] μαθητές στην Ελλάδα μείωσαν τις επιδόσεις τους κατά 21,3 μονάδες, ενώ οι κοινωνικο-οικονομικά μειονεκτούντες[9] κατά 15,5 μονάδες (OECD, 2023a).

Η Ευρωπαϊκή Ένωση είχε θέσει, στο πλαίσιο του στρατηγικού σχεδίου «Εκπαίδευση και Κατάρτιση 2020», τον στόχο το ποσοστό μαθητών με χαμηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά να πέσει κάτω από το 15% μέχρι το 2020. Ο στόχος αυτός επιτεύχθηκε σε χώρες όπως η Εσθονία, η Δανία και η Πολωνία, ενώ η Ελλάδα με ποσοστό 35,7% το 2018 παρέμεινε μακριά από αυτόν (European Commission, 2019). Ο ίδιος στόχος έχει πλέον τεθεί εκ νέου για το 2030, γεγονός που καθιστά ακόμη πιο κρίσιμη την υποστήριξη των κοινωνικά ευάλωτων ομάδων και την ενίσχυση της ισότητας στην εκπαίδευση.

[6] Κατά τον ΟΟΣΑ, διαφορά περίπου 38-40 μονάδων PISA αντιστοιχεί ενδεικτικά σε ένα σχολικό έτος φοίτησης. Η εκτίμηση αυτή δεν είναι ακριβής, αλλά χρησιμοποιείται ως πρακτικό μέτρο σύγκρισης διαφορών στις μέσες επιδόσεις (OECD, 2019b).

[7] Οι μαθητές αυτοί χαρακτηρίζονται από την έρευνα PISA ως «ανθεκτικοί». Ειδικότερα ως «ανθεκτικοί» χαρακτηρίζονται οι μαθητές οι οποίοι, ενώ ανήκουν στο κατώτερο 25% της κατανομής αναφορικά με το κοινωνικο-οικονομικό επίπεδο της οικογένειας προέλευσής τους, επιτυγχάνουν επιδόσεις που εμπίπτουν στο ανώτερο 25% της κατανομής των σχετικών επιδόσεων.

[8] Οι μαθητές που κατατάσσονται στο 25% με τις υψηλότερες τιμές του δείκτη ESCS.

[9] Οι μαθητές που κατατάσσονται στο κατώτερο 25% του δείκτη ESCS.

3.8 Διαφορές φύλου

Στην έρευνα PISA 2022, σε 40 από τις 81 συμμετέχουσες χώρες τα αγόρια ξεπέρασαν τα κορίτσια στον μαθηματικό εγγραμματισμό, ενώ σε 17 χώρες τα κορίτσια παρουσίασαν στατιστικά σημαντικό προβάδισμα έναντι των αγοριών (OECD, 2023). Ειδικότερα, όσον αφορά την Ελλάδα, η διαφορά αυτή ανέρχεται σε πλεονέκτημα 6 μονάδων υπέρ των αγοριών, χωρίς όμως αυτή η διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική (OECD, 2023· Nolka & Sofianopoulou, 2024).

Σύμφωνα με τα διαχρονικά αποτελέσματα της έρευνας, το 2003 καταγραφόταν στατιστικά σημαντική διαφορά 19 μονάδων υπέρ των αγοριών, η οποία, σύμφωνα με τον ΟΟΣΑ, αντιστοιχούσε σε μισό σχολικό έτος διαφοράς μεταξύ των δύο φύλων. Ωστόσο, μέσα σε διάστημα δεκαπέντε ετών, και συγκεκριμένα το 2018, η διαφορά αυτή εξαλείφθηκε πλήρως (Nolka & Sofianopoulou, 2022). Αξίζει να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με τον ΟΟΣΑ, η Ελλάδα συγκαταλέγεται στις χώρες όπου η μείωση ή και εξάλειψη της διαφοράς αποδίδεται κυρίως στη μείωση των επιδόσεων των αγοριών και όχι στη βελτίωση των επιδόσεων των κοριτσιών (OECD, 2019a).

Σχετικά με το ποσοστό των μαθητών και μαθητριών που κατατάσσονται στα χαμηλά επίπεδα μαθηματικού εγγραμματισμού (κάτω από το Επίπεδο 2) στην έρευνα PISA 2022, δεν παρατηρείται ιδιαίτερη διαφορά μεταξύ των δύο φύλων, καθώς το ποσοστό των αγοριών ανέρχεται στο 46% και των κοριτσιών στο 48%. Όσον αφορά τα υψηλά επίπεδα μαθηματικού εγγραμματισμού (Επίπεδο 5 ή 6), τα αγόρια εμφανίζονται σε μεγαλύτερο ποσοστό (3%) σε σύγκριση με τα κορίτσια (1%) (OECD, 2023b).

3.9 Μεταναστευτικό υπόβαθρο και επίδοση στον μαθηματικό εγγραμματισμό

Στην Ελλάδα το ποσοστό των μαθητών με μεταναστευτικό υπόβαθρο αυξήθηκε στο 13% το 2022, σε σύγκριση με 11% το 2012, ενώ ο αντίστοιχος μέσος όρος στις χώρες του ΟΟΣΑ είναι 12,9%. Οι μαθητές αυτοί περιλαμβάνουν τόσο πρώτης όσο και δεύτερης γενιάς μετανάστες. Οι πρώτης γενιάς μετανάστες – που αποτελούν το 3% των 15χρονων μαθητών– έχουν γεννηθεί εκτός Ελλάδας και οι περισσότεροι (60%) εγκαταστάθηκαν στη χώρα πριν από την ηλικία των 5 ετών, ενώ ένα 17% έφτασε μετά τα 12, έχοντας φοιτήσει σε διαφορετικό εκπαιδευτικό σύστημα.

Οι μαθητές με μεταναστευτικό υπόβαθρο αντιμετωπίζουν συχνότερα κοινωνικο-οικονομικές δυσκολίες, καθώς το 60% αυτών ανήκει στους κοινωνικο-οικονομικά μειονεκτούντες, σε αντίθεση με το 25% του συνόλου των μαθητών (ποσοστό υψηλότερο από τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ, 48%). Επίσης, το 45% των μεταναστών μαθητών δηλώνει πως η κύρια γλώσσα που χρησιμοποιεί στο σπίτι διαφέρει από εκείνη της αξιολόγησης PISA.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων του PISA 2022 δείχνει ότι οι μετανάστες μαθητές σημείωσαν κατά μέσο όρο χαμηλότερη επίδοση στα Μαθηματικά σε σχέση με τους γηγενείς: οι μετανάστες δεύτερης γενιάς κατά 23 μονάδες και οι μετανάστες πρώτης γενιάς κατά 38 μονάδες. Ωστόσο, οι διαφορές αυτές εξηγούν μόνο ένα μικρό ποσοστό της συνολικής διακύμανσης των επιδόσεων (1,4% το 2022). Όταν λαμβάνονται υπόψη πρόσθετοι παράγοντες, όπως η κύρια γλώσσα επικοινωνίας στο σπίτι και το κοινωνικο-οικονομικό υπόβαθρο σε ατομικό και σχολικό επίπεδο, οι ανισότητες μειώνονται σημαντικά. Συγκεκριμένα, οι μαθητές που δηλώνουν ως κύρια γλώσσα τα ελληνικά σημειώνουν υψηλότερη επίδοση (κατά 20 μονάδες το 2022), ενώ το κοινωνικο-οικονομικό υπόβαθρο – ιδιαίτερα σε επίπεδο σχολείου – αναδεικνύεται ο ισχυρότερος παράγοντας που σχετίζεται με την επίδοση (57 μονάδες αύξηση για κάθε τυπική απόκλιση στον δείκτη το 2022).

Έτσι, όταν κανείς συνυπολογίζει τη γλώσσα που ομιλείται στο σπίτι των μαθητών, το κοινωνικο-οικονομικό τους υπόβαθρο και φύλο τους, οι διαφορές στην επίδοση μεταξύ γηγενών και μεταναστών δεν είναι πλέον στατιστικά σημαντικές για τον κύκλο του 2022, ενώ παραμένουν σημαντικές μόνο για τον κύκλο του 2018. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι τα κορίτσια με μεταναστευτικό υπόβαθρο καταγράφουν συστηματικά χαμηλότερη επίδοση στα Μαθηματικά από τα αγόρια (κατά 12 μονάδες το 2022).

Συνολικά, τα δεδομένα δείχνουν ότι, αν και οι μαθητές με μεταναστευτικό υπόβαθρο εξακολουθούν να αντιμετωπίζουν κοινωνικο-οικονομικές δυσκολίες και εμπόδια που συνδέονται με τη γλώσσα, οι διαφορές στην επίδοση στα Μαθηματικά σε σχέση με τους γηγενείς περιορίζονται σημαντικά όταν ελέγχονται αυτοί οι παράγοντες. Αυτό καταδεικνύει πως οι εκπαιδευτικές ανισότητες στην Ελλάδα δεν απορρέουν αποκλειστικά από το μεταναστευτικό υπόβαθρο, αλλά σχετίζονται κυρίως με το κοινωνικο-οικονομικό πλαίσιο και το σχολικό περιβάλλον, με αποτέλεσμα να παραμένουν επίμονες αλλά πιο σύνθετες σε σχέση με την απλή διάκριση «γηγενείς – μετανάστες».

3.10 Αυτοαποτελεσματικότητα στα Μαθηματικά και επίδοση στον μαθηματικό εγγραμματισμό

Ο όρος *αυτοαποτελεσματικότητα* περιγράφει τις πεποιθήσεις ενός ατόμου σχετικά με την ικανότητά του να παράγει τα επιθυμητά αποτελέσματα μέσω των πράξεων και των ικανοτήτων του. Οι πεποιθήσεις αυτές λειτουργούν ως ισχυρό κίνητρο, ενισχύοντας την ικανότητα του ατόμου να αντεπεξέρχεται σε δυσκολίες και προκλήσεις (Bandura, 1994, 1997). Στο πεδίο των Μαθηματικών, η αυτοαποτελεσματικότητα αναφέρεται στις αντιλήψεις των μαθητών για το πόσο ικανοί είναι να χειρίζονται και να εκτελούν με επιτυχία εργασίες που σχετίζονται με τα Μαθηματικά, ακόμη και όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες. Πρόκειται, συνεπώς, για έναν ψυχολογικό δείκτη που επηρεάζει άμεσα την ετοιμότητα των μαθητών να εμπλακούν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία και να επιτύχουν σε απαιτητικά γνωστικά περιβάλλοντα (Fast et al., 2010; OECD, 2013; Stankov et al., 2014; Nolka, 2025).

Τα ευρήματα του PISA 2022 επιβεβαιώνουν τη στενή σύνδεση ανάμεσα στην αυτοαποτελεσματικότητα στα Μαθηματικά και την επίδοση στον μαθηματικό εγγραμματισμό. Οι μαθητές που δηλώνουν υψηλά επίπεδα αυτοαποτελεσματικότητας έχουν την τάση να επιτυγχάνουν υψηλότερες βαθμολογίες, να χρησιμοποιούν πιο ενεργές μαθησιακές στρατηγικές και να αναπτύσσουν θετικότερες στάσεις απέναντι στα Μαθηματικά, ενώ αντίθετα οι μαθητές με χαμηλή αυτοαποτελεσματικότητα καταγράφουν χαμηλότερες επιδόσεις και μειωμένη διάθεση για ανάληψη γνωστικών προκλήσεων. Η σχέση αυτή είναι διαχρονικά σταθερή σε όλους τους κύκλους του PISA, γεγονός που υπογραμμίζει τη σημασία της αυτοαποτελεσματικότητας ως βασικού ψυχολογικού και παιδαγωγικού δείκτη μάθησης.

Στην περίπτωση της Ελλάδας, **οι μαθητές αναφέρουν χαμηλότερη αυτοαποτελεσματικότητα στα Μαθηματικά σε σχέση με τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ**, στοιχείο που συνδέεται με τις χαμηλότερες επιδόσεις τους στα Μαθηματικά. Διαχρονικά, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η αυτοαποτελεσματικότητα των μαθητών της Ελλάδας στα Μαθηματικά παραμένει χαμηλή, στοιχείο που εν μέρει εξηγεί τη σταθερή υστέρηση στις επιδόσεις σε σύγκριση με τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ.

Η φύση των μαθησιακών εμπειριών και του τρόπου διδασκαλίας συνδέεται στενά με το πώς οι μαθητές διαμορφώνουν τις πεποιθήσεις τους για τις ικανότητές τους. Τα δεδομένα

από τα ερωτηματολόγια μαθητών του PISA 2022 παρέχουν επιπλέον ενδείξεις για τις μαθησιακές εμπειρίες που ενδέχεται να επηρεάζουν την αυτοαποτελεσματικότητα των μαθητών στην Ελλάδα. Ειδικότερα, φαίνεται ότι οι μαθητές στη χώρα μας συναντούν **πολύ συχνότερα αλγεβρικές ασκήσεις** – όπως η λύση εξισώσεων – σε σύγκριση με προβλήματα που συνδέονται με την καθημερινή ζωή. Οι δραστηριότητες που ζητούν εφαρμογή των μαθηματικών σε πραγματικά παραδείγματα (π.χ. υπολογισμός δρομολογίων, φόρων, κατανάλωσης ενέργειας ή υπολογισμοί σε χάρτες και επιφάνειες) εμφανίζονται **σπάνια ή και ποτέ** στην Ελλάδα σε σύγκριση με τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ. Αντίθετα, οι εξισώσεις, όπως «$6x^2 + 5 = 29$» ή «$3x + 5 = 17$», εμφανίζονται **συχνά**, και μάλιστα συχνότερα στην Ελλάδα από τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ (OECD, 2024c). Το εύρημα αυτό υποδηλώνει ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών στη χώρα εστιάζει περισσότερο στη **συμβολική, τυπική άσκηση και στην αλγεβρική διαδικασία**, ενώ η σύνδεση με **προβλήματα της πραγματικής ζωής και με πρακτικές εφαρμογές** παραμένει περιορισμένη. Έτσι, η μαθησιακή εμπειρία των μαθητών τείνει να είναι περισσότερο θεωρητική και λιγότερο προσανατολισμένη στην αξιοποίηση των μαθηματικών σε καθημερινές καταστάσεις, στοιχείο που ενδέχεται να επηρεάζει αρνητικά την ανάπτυξη της αυτοαποτελεσματικότητάς τους.

3.11 Άγχος για τα Μαθηματικά και επίδοση στον μαθηματικό εγγραμματισμό

Τα αποτελέσματα του PISA 2022 καταδεικνύουν ότι το άγχος για τα Μαθηματικά αποτελεί κρίσιμο εμπόδιο τόσο για την επίδοση των μαθητών όσο και για τη διά βίου μάθηση. Το 65% των μαθητών, κατά μέσο όρο, των χωρών του ΟΟΣΑ δηλώνουν ότι ανησυχούν για τους βαθμούς τους στα Μαθηματικά (το αντίστοιχο 59% στην Ελλάδα) και το 55% ότι φοβούνται την αποτυχία (57,4% στην Ελλάδα), ενώ το 40% βιώνει νευρικότητα, άγχος ή αίσθημα ανικανότητας κατά την επίλυση προβλημάτων ή την εκπόνηση εργασιών (περίπου 44% στην Ελλάδα) (OECD, 2023c). Το υψηλό επίπεδο άγχους για τα Μαθηματικά συνδέεται με χαμηλή αυτοαποτελεσματικότητα, μειωμένο ενδιαφέρον και τάση αποφυγής προκλήσεων, περιορίζοντας την ενεργή συμμετοχή και την αξιοποίηση στρατηγικών μάθησης. Η διεθνής ανάλυση του PISA δείχνει ότι κάθε μονάδα αύξησης στον δείκτη «άγχος για τα Μαθηματικά» αντιστοιχεί σε μείωση περίπου 18 μονάδων στην επίδοση, ακόμη και μετά τον έλεγχο κοινωνικο-οικονομικών παραγόντων· οι μαθητές με πολύ υψηλό άγχος σημειώνουν κατά δεκάδες μονάδες χαμηλότερες επιδόσεις (OECD, 2023c). Τα κορίτσια και οι κοινωνικο-

οικονομικά μειονεκτούντες μαθητές αναφέρουν συστηματικά υψηλότερα επίπεδα άγχους, ακόμα και όταν αποδίδουν καλά, γεγονός που καταδεικνύει τον πολυδιάστατο χαρακτήρα του φαινομένου.

Διαχρονικά, ο δείκτης «άγχος για τα Μαθηματικά» παραμένει σταθερά παρών στις μετρήσεις του PISA, με αξιοσημείωτη αύξηση την περίοδο 2012–2022 στις περισσότερες χώρες του ΟΟΣΑ, συμπεριλαμβανομένης και της Ελλάδας (OECD, 2023c). Στη χώρα μας, οι μαθητές δηλώνουν υψηλότερα επίπεδα άγχους σε σχέση με τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ. Οι **θετικές σχέσεις μαθητών–εκπαιδευτικών φαίνεται να λειτουργούν προστατευτικά, μειώνοντας το άγχος για τα Μαθηματικά** και ενισχύοντας την χρήση μαθησιακών στρατηγικών. Συνεπώς, η συστηματική αντιμετώπιση του άγχους για τα Μαθηματικά δεν αποτελεί μόνο ζήτημα ψυχικής ευημερίας, αλλά και βασική εκπαιδευτική προτεραιότητα, με άμεση επίδραση στην αυτοπεποίθηση, τις επιδόσεις και τη δυνατότητα των μαθητών να συμμετέχουν ενεργά στη μάθηση και στη διαρκή ανάπτυξη δεξιοτήτων.

3.12 Αναπτυξιακή νοοτροπία (growth mindset) και επίδοση στον μαθηματικό εγγραμματισμό

Η έννοια της αναπτυξιακής νοοτροπίας (growth mindset) αναφέρεται στην πεποίθηση ότι οι ικανότητες και η ευφυΐα μπορούν να αναπτυχθούν και να βελτιωθούν μέσα από την προσπάθεια, την εξάσκηση και την κατάλληλη καθοδήγηση. Αντίθετα, η στατική νοοτροπία (fixed mindset) βασίζεται στην πεποίθηση ότι η ευφυΐα και οι ικανότητες αποτελούν έμφυτα, αμετάβλητα χαρακτηριστικά (Dweck, 2006). Έρευνες έχουν δείξει ότι τα σχολεία που ενθαρρύνουν την αναπτυξιακή νοοτροπία συμβάλλουν στην ενίσχυση της μαθησιακής προσπάθειας και της προσαρμοστικότητας των μαθητών, οδηγώντας σε υψηλότερα μαθησιακά αποτελέσματα (Yeager & Walton, 2011).

Στο πλαίσιο του PISA 2022, μόνο το 35% των μαθητών διεθνώς ανέφερε ότι διαθέτει αναπτυξιακή νοοτροπία στα μαθηματικά, δηλαδή πιστεύει ότι οι ικανότητες του στα μαθηματικά μπορούν να βελτιωθούν με την προσπάθεια (OECD, 2024c). Το εύρημα αυτό καταδεικνύει ότι, παγκοσμίως, η πλειονότητα των μαθητών εξακολουθεί να αντιμετωπίζει την ευφυΐα ως σταθερό χαρακτηριστικό, γεγονός που ενδέχεται να περιορίζει τη μαθησιακή τους εμπλοκή και την ανθεκτικότητά τους απέναντι στις δυσκολίες.

Στην περίπτωση της Ελλάδας, τα δεδομένα των ερωτηματολογίων του PISA 2022 δείχνουν ότι **οι μαθητές εμφανίζουν σε μεγαλύτερο ποσοστό, σε σύγκριση με τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ, μια στατική αντίληψη για την ευφυΐα και την ικανότητα στα Μαθηματικά.** Πάνω από τους μισούς μαθητές θεωρούν ότι η ευφυΐα δεν αλλάζει σημαντικά και ότι κάποιοι «απλώς δεν είναι καλοί» στα Μαθηματικά. Αυτό σημαίνει ότι πολλοί πιστεύουν πως «ή είσαι καλός στα μαθήματα ή όχι», παρά ότι η επιτυχία μπορεί να επιτευχθεί μέσω προσπάθειας, εξάσκησης και στρατηγικής μάθησης. Η αντίληψη αυτή, σύμφωνα με τα δεδομένα του ΟΟΣΑ, συνδέεται με χαμηλότερα επίπεδα μαθησιακής κινητοποίησης και χαμηλότερες επιδόσεις. Πράγματι, οι μαθητές που διαθέτουν αναπτυξιακή νοοτροπία επιτυγχάνουν, κατά μέσο όρο, 30-40 μονάδες υψηλότερη επίδοση στον μαθηματικό εγγραμματισμό του PISA σε σύγκριση με εκείνους που υιοθετούν στατική νοοτροπία.

Τα ευρήματα αυτά αναδεικνύουν τη σημασία της καλλιέργειας μιας κουλτούρας μάθησης, που ενθαρρύνει την προσπάθεια, την επιμονή και τη διαρκή βελτίωση. Στο ελληνικό εκπαιδευτικό πλαίσιο, η ενίσχυση της αναπτυξιακής νοοτροπίας μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά στην ενδυνάμωση της αυτοπεποίθησης των μαθητών στα Μαθηματικά, στη μείωση του φόβου αποτυχίας και στη διαμόρφωση θετικότερων στάσεων απέναντι στη μάθηση και την πρόοδο.

3.13 Η επίδραση της διδασκαλίας

Η μελέτη των Liu, Hansen, Valcke, & De Neve, (2024) εξέτασε τη σχέση ανάμεσα στην ποιότητα της διδασκαλίας, την κοινωνικο-οικονομική κατάσταση των μαθητών (SES) και την επίδοση στα Μαθηματικά, χρησιμοποιώντας δεδομένα από δέκα ευρωπαϊκές χώρες που συμμετείχαν στο PISA το 2012 και το 2022. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι **η ποιότητα της διδασκαλίας, όπως την αντιλαμβάνονται οι μαθητές, επηρεάζει σημαντικά την επίδοσή τους**. Τα στοιχεία αυτά επιβεβαιώνονται από τις τέσσερις βασικές διαστάσεις της ποιότητας διδασκαλίας που καταγράφονται στο PISA και συγκεκριμένα:

- **την υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό,**
- **το κλίμα πειθαρχίας** στην τάξη,
- **τη γνωστική ενεργοποίηση των μαθητών** κατά τη διδασκαλία (ενθάρρυνση μαθηματικής σκέψης και καλλιέργεια συλλογισμού)**.**

Η **υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό** (σημαντικά χαμηλότερη στην Ελλάδα από ό,τι καταγράφεται κατά μέσο όρο στον ΟΟΣΑ) και το **θετικό κλίμα πειθαρχίας** στη σχολική τάξη (η Ελλάδα καταγράφεται ανάμεσα στις τελευταίες χώρες του ΟΟΣΑ ως προς αυτόν τον δείκτη) σχετίζονται σταθερά με υψηλότερη επίδοση στα μαθηματικά. Μαθητές που νιώθουν ότι ο διδάσκων ενδιαφέρεται και βοηθά, καθώς και ότι η τάξη λειτουργεί με σειρά και χωρίς συνεχείς διακοπές, επιτυγχάνουν καλύτερα αποτελέσματα. Αντίθετα, η **έλλειψη πειθαρχίας στην τάξη** συνδέεται με χαμηλότερες επιδόσεις, κάτι που γίνεται εντονότερο στο PISA 2022, όπου παρατηρείται γενική επιδείνωση του κλίματος στις τάξεις σε πολλές χώρες.

Σημαντικό ρόλο παίζει και η **γνωστική ενεργοποίηση**: όταν οι μαθητές ενθαρρύνονται να εξηγούν τη σκέψη τους, να επιχειρηματολογούν και να λύνουν προβλήματα, οι επιδόσεις τους βελτιώνονται (στην Ελλάδα οι μαθητές δηλώνουν ότι τους παρέχονται λιγότερο τέτοιες ευκαιρίες κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στην τάξη τους σε σχέση με ό,τι συμβαίνει κατά μέσο όρο στις χώρες του ΟΟΣΑ). Ωστόσο, η απλή «ενθάρρυνση μαθηματικής σκέψης» χωρίς καθοδήγηση μπορεί να έχει αρνητικά αποτελέσματα, ειδικά για μαθητές με χαμηλό υπόβαθρο. Αντίθετα, η **καλλιέργεια συλλογισμού** — όπου ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί βήμα-βήμα την ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής — έχει θετική επίδραση.

Ιδιαίτερη σημασία έχει ο παράγοντας **κοινωνικο-οικονομικό υπόβαθρο**: μαθητές από οικογένειες με υψηλότερο κοινωνικο-οικονομικό υπόβαθρο, όπως ήδη έχει άλλωστε αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, επιτυγχάνουν συστηματικά καλύτερα αποτελέσματα. Όμως, η μελέτη των Liu, Hansen, Valcke, & De Neve, (2024) δείχνει ότι η **υψηλής ποιότητας διδασκαλία μπορεί να μειώσει την ανισότητα**, καθώς η υποστήριξη του εκπαιδευτικού, το καλό κλίμα πειθαρχίας στην τάξη και η καθοδηγούμενη γνωστική ενεργοποίηση **ωφελούν περισσότερο τους μαθητές από πιο μειονεκτικά περιβάλλοντα**.

Συνολικά, η έρευνα υπογραμμίζει ότι για να βελτιωθεί η επίδοση στα Μαθηματικά — και ιδίως για να περιοριστούν οι κοινωνικές ανισότητες — είναι κρίσιμο οι εκπαιδευτικοί να υποστηρίζουν ενεργά τους μαθητές, να διατηρούν ένα ήρεμο και οργανωμένο περιβάλλον μάθησης και να εφαρμόζουν στρατηγικές που αναπτύσσουν σταδιακά τη μαθηματική σκέψη και συλλογιστική.

Τα δεδομένα του PISA 2022 από τα ερωτηματολόγια των μαθητών στην Ελλάδα παρέχουν περαιτέρω ενδείξεις για το πώς οι μαθητές βιώνουν τη διδασκαλία των Μαθηματικών και σε ποιον βαθμό ενεργοποιούνται γνωστικά στο μάθημα. Σύμφωνα με τα ευρήματα, ένα μεγάλο

ποσοστό μαθητών, τόσο στην Ελλάδα όσο και στον μέσο όρο του ΟΟΣΑ (περίπου 44%-45%), δηλώνει ότι πρακτικές γνωστικής ενεργοποίησης «δεν εφαρμόζονται» στο μάθημα των Μαθηματικών. Αυτό σημαίνει ότι σε πολλές τάξεις **δεν αξιοποιούνται συστηματικά μέθοδοι που ενεργοποιούν γνωστικά τους μαθητές και βοηθούν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.** Ειδικότερα για την Ελλάδα, οι μαθητές αναφέρουν ότι **έχουν λιγότερες ευκαιρίες** να σκεφτούν εννοιολογικά, να κατανοήσουν το «γιατί» πίσω από τον μαθηματικό φορμαλισμό και **να συνδέσουν νέες έννοιες με προηγούμενες**, γεγονός που περιορίζει τη βαθύτερη κατανόηση του αντικειμένου. Παράλληλα, όταν εφαρμόζονται διδακτικές πρακτικές όπως η αιτιολόγηση απαντήσεων ή η επεξήγηση του τρόπου επίλυσης, αυτές φαίνεται να χρησιμοποιούνται ελαφρώς συχνότερα στην Ελλάδα σε σχέση με το διεθνές δείγμα.

Αναφορικά με τις πρακτικές ανάπτυξης μαθηματικού τρόπου σκέψης, τα δεδομένα δείχνουν ότι η σύνδεση των Μαθηματικών με την καθημερινή ζωή εφαρμόζεται **μερικώς** στη σχολική τάξη στην Ελλάδα, με ποσοστά παρόμοια με εκείνα του ΟΟΣΑ, αλλά ελαφρώς χαμηλότερα στο σκέλος της εφαρμογής σε πραγματικά προβλήματα. Μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών στην Ελλάδα δηλώνει ότι ο καθηγητής τους «ποτέ ή σχεδόν ποτέ» δεν ζητά να χρησιμοποιηθούν τα Μαθηματικά για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινότητας, σε σύγκριση με το αντίστοιχο ποσοστό του ΟΟΣΑ. Αν και υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναπτύξουν μαθηματικό συλλογισμό και να δουν πώς συνδέονται οι μαθηματικές έννοιες, η συστηματική και σταθερή εφαρμογή αυτών των πρακτικών παραμένει περιορισμένη.

Επιπλέον, τα δεδομένα του PISA 2022 δείχνουν ότι οι δραστηριότητες που σχετίζονται με την **ερμηνεία δεδομένων, τη μοντελοποίηση και την εφαρμογή των Μαθηματικών σε πραγματικά προβλήματα** εμφανίζονται σχετικά **σπάνια** στην ελληνική τάξη, με παρόμοια όμως τάση και στον μέσο όρο του ΟΟΣΑ. Περίπου οι μισοί μαθητές δηλώνουν ότι τέτοιες εργασίες **«δεν εφαρμόζονται»**, γεγονός που υποδηλώνει ότι τέτοιου είδους δραστηριότητες δεν αποτελούν βασικό και συστηματικό μέρος της διδασκαλίας. Ειδικότερα οι δραστηριότητες που απαιτούν **ερμηνεία δεδομένων, αναγνώριση μαθηματικών όψεων σε προβλήματα της πραγματικής ζωής ή χρήση εννοιών όπως η στατιστική απόκλιση** εμφανίζονται συχνότερα ως «μερικές φορές» ή «σπάνια», ενώ η **χρήση εργαλείων τεχνολογίας** (π.χ. λογιστικά φύλλα, λογισμικά, προγραμματισμός) εμφανίζεται επίσης

περιορισμένη. Συνεπώς, η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ελλάδα (αλλά και σε μεγάλο βαθμό και στον ΟΟΣΑ) παραμένει περισσότερο προσανατολισμένη σε **παραδοσιακές μορφές επίλυσης ασκήσεων**, παρά σε δραστηριότητες διερεύνησης, ανάλυσης δεδομένων και μοντελοποίησης, που συνδέουν τα Μαθηματικά με την καθημερινή ζωή και την πραγματική χρήση τους.

Τέλος, οι στάσεις των μαθητών στην Ελλάδα απέναντι στα Μαθηματικά, σύμφωνα με τα ίδια δεδομένα, είναι γενικά παρόμοιες με τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ με κάποιες μικρές αλλά σημαντικές διαφορές. Τα Μαθηματικά φαίνεται να μην αποτελούν αγαπημένο μάθημα για ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών και μαθητριών, μα τα επίπεδα συμφωνίας να είναι ελαφρώς χαμηλότερα από τον ΟΟΣΑ, ενώ και η δήλωση ότι «τα Μαθηματικά είναι εύκολα» εμφανίζεται περίπου στα ίδια επίπεδα με τις διεθνείς τιμές, υποδηλώνοντας ότι η αντίληψη της δυσκολίας του μαθήματος είναι κοινή. Ωστόσο παρατηρείται ότι η **επιθυμία των μαθητών να τα πηγαίνουν καλά** στα Μαθηματικά είναι ισχυρή, ανεξάρτητα από το αν τους αρέσει ή τα θεωρούν εύκολα, γεγονός που δείχνει υψηλό **κίνητρο επίδοσης** και διάθεση για προσπάθεια από την πλευρά των μαθητών.

Κεφάλαιο 4: Προτάσεις αξιοποίησης του PISA στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Εισαγωγή

Σύμφωνα με το πλαίσιο του PISA, ο μαθηματικός εγγραμματισμός αναφέρεται στην ικανότητα ενός ατόμου να διατυπώνει, να χρησιμοποιεί και να ερμηνεύει τα Μαθηματικά προκειμένου να συνδέει ένα πρόβλημα με τα Μαθηματικά και να το λύνει. Πώς όμως συνδέεται η προσέγγιση του μαθηματικού εγγραμματισμού αφενός με τα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών και αφετέρου με την καθημερινή διδακτική πράξη; Στην ενότητα αυτή θα σκιαγραφηθεί η σχέση του μαθηματικού εγγραμματισμού με τα ελληνικά Προγράμματα Σπουδών. Στη συνέχεια θα διατυπωθούν ενδεικτικές προτάσεις αξιοποίησης των ευρημάτων, της εμπειρίας και των θεμάτων του PISA στην καθημερινή διδακτική πράξη.

4.1 Μαθηματικός εγγραμματισμός στα ισχύοντα προγράμματα σπουδών και τα σχολικά βιβλία

Η σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο, ο μαθηματικός συλλογισμός και η επίλυση προβλήματος είναι στόχοι που τίθενται από τα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών διεθνώς κατά τις τελευταίες δεκαετίες. Αυτό ισχύει και για τα ελληνικά Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών. Έτσι, στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών για το Γυμνάσιο (ΔΕΠΠΣ/ΑΠΣ Μαθηματικών 2003), ως σκοποί αναφέρονται μεταξύ άλλων:

- Η καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας αλλά και περιγραφής πραγματικών φαινομένων και καταστάσεων.
- Η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία.
- Η σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων.

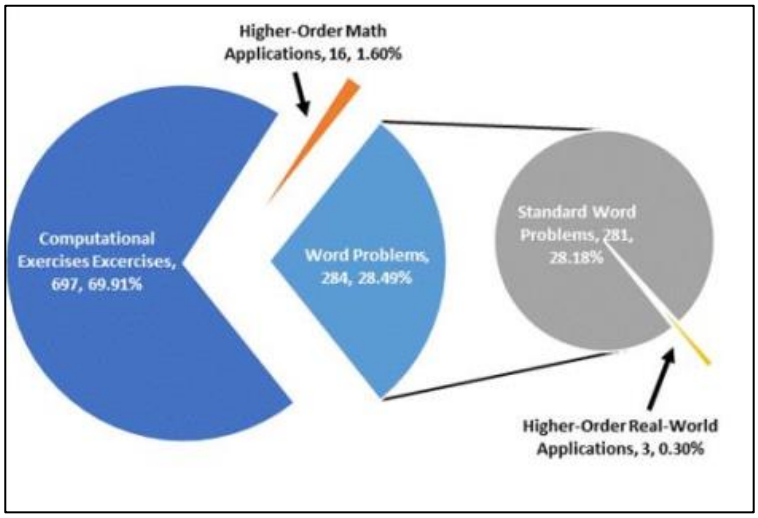
Στις οδηγίες διδασκαλίας των Μαθηματικών του Γυμνασίου, υπάρχει συχνή αναφορά στην μοντελοποίηση προβλημάτων και ρεαλιστικών καταστάσεων. Ενδεικτικά, ενότητες στις οποίες αναφέρονται στοιχεία σύνδεσης με τον πραγματικό κόσμο και οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν προβλήματα είναι:

- τα κλάσματα (στην Α’ τάξη),
- οι εξισώσεις (στις Α’, Β’ και Γ’ τάξεις),
- οι συναρτήσεις (στη Β’ τάξη),
- τα εμβαδά,
- το Πυθαγόρειο Θεώρημα και οι τετραγωνικές ρίζες (στη Β’ τάξη),
- τα γραμμικά συστήματα (στη Γ’ τάξη),
- η στατιστική (στη Β’ τάξη) και
- οι πιθανότητες (στη Γ’ τάξη).

Επιπλέον, στις οδηγίες διδασκαλίας των Μαθηματικών του Γυμνασίου, συχνά εμφανίζονται προτροπές και προτάσεις για μαθηματικά έργα και δραστηριότητες των μαθητών που προωθούν τον μαθηματικό συλλογισμό. Ενδεικτικά, συχνά προτείνεται η διερεύνηση από τα παιδιά ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών εννοιών και σχημάτων, η αιτιολόγηση των ευρημάτων τους, οι συνδέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων (όπως η οπτικοποίηση της επιμεριστικής ιδιότητας με τη χρήση εμβαδών) και οι συνδέσεις με άλλες περιοχές (όπως η σύνδεση του Πυθαγόρειου θεωρήματος με τα εμβαδά και τις τετραγωνικές ρίζες).

Παρ’ όλα αυτά, στα σχολικά βιβλία φαίνεται να υπάρχουν σπάνια οι συνδέσεις με τον πραγματικό κόσμο και τα πραγματικά προβλήματα. Επιπλέον, συνήθως η εμπειρία των μαθητών από την τάξη των Μαθηματικών δεν φαίνεται να είναι πλούσια σε ευκαιρίες εμπλοκής σε προκλητικά μαθηματικά προβλήματα που προωθούν τον μαθηματικό συλλογισμό, τη διερεύνηση, την επιχειρηματολογία, την κριτική αξιολόγηση ισχυρισμών και συμπερασμάτων.

Ενδεικτικά, σε πρόσφατη διεθνή έρευνα μεταξύ 19 χωρών (Schmidt, W. et al., 2022) στο σχολικό βιβλίο της Β’ Γυμνασίου μόνο το 1,6% των ασκήσεων ήταν προκλητικά μαθηματικά προβλήματα που απαιτούσαν διερεύνηση ή/και αιτιολόγηση και μόνο 0,3% των ασκήσεων ήταν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο (Γράφημα 6).



Γράφημα 6: Οι ασκήσεις στο βιβλίο της Β΄Γυμνασίου (από Schmidt, W. et al., 2022)

Η εικόνα από όλες τις 19 συμμετέχουσες χώρες είναι παρόμοια, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει πρόβλημα: τα προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο είναι εξαιρετικά μικρό ποσοστό των ασκήσεων. Ωστόσο, ίσως είναι ένδειξη μιας ισχυρής διεθνούς παράδοσης στη διδασκαλία των Μαθηματικών που δεν έχει υιοθετήσει ακόμα την οπτική της έμφασης στον μαθηματικό εγγραμματισμό.

4.2 Μαθηματικός εγγραμματισμός στα Νέα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών

Τα νέα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών φαίνεται να σηματοδοτούν μια πιο αποφασιστική στροφή σε σχέση με τον μαθηματικό εγγραμματισμό. Έτσι, στην εισαγωγή του Π.Σ των Μαθηματικών του Γυμνασίου αναφέρεται:

«*Το νέο ΠΣ φιλοδοξεί να προσφέρει σε όλους τους/τις μαθητές την ευκαιρία να είναι σε θέση, μέσα από τη συμμετοχή τους στα μαθήματα, να:*

- *…*
- *αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, όπως ο συλλογισμός, η μοντελοποίηση, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν τη μάθηση των Μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα,*
- *…*

- *αναγνωρίζουν συνδέσεις μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων πεδίων της ανθρώπινης γνώσης και δράσης και εκτιμούν τα Μαθηματικά ως προσπελάσιμο και ενδιαφέρον πεδίο μελέτης,*
- *χρησιμοποιούν με αυτοπεποίθηση και εμπιστοσύνη τα Μαθηματικά για να κατανοούν με κριτικό τρόπο τον κόσμο γύρω τους. Στην κατεύθυνση αυτή συλλέγουν, αναλύουν, οργανώνουν και αξιολογούν δεδομένα ελέγχοντας τις πηγές προέλευσής τους και υπερασπίζονται τις απόψεις τους. Έτσι, δρουν ως υπεύθυνοι πολίτες στους χώρους δράσης τους, συμβάλλοντας δυναμικά στη δημοκρατική και ισότιμη ανάπτυξη των κοινωνιών σε μικρο- και μακρο- επίπεδο.*» (σελ. 4-5)

Και παρακάτω, αναφέρεται:

«*… Οι διαδικασίες μάθησης που λαμβάνουν χώρα στην τάξη των Μαθηματικών συνδέονται στενά με την έννοια του μαθηματικού γραμματισμού. Πρόκειται για την ικανότητα του ατόμου α) να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα Μαθηματικά και β) να αναλύει και ερμηνεύει τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα Μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων στο κοινωνικό περιβάλλον.*» (σελ. 8)

Αυτές οι οπτικές που υιοθετούνται από το νέο ΠΣ αποτυπώνονται και σε πολλά Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ), όπως, για παράδειγμα, στα:

- Αρ.Α.7.11. Να μοντελοποιούν και να λύνουν προβλήματα με ακέραιους σε πραγματικά και μαθηματικά πλαίσια.
- Αλ.Σχ.8.5. Να επιλύουν ρεαλιστικά προβλήματα με εξισώσεις της μορφής αx+β=γx+δ με άγνωστο και στα δύο μέλη.
- Αλ.Σρ.8.14. Να διερευνούν μέσα από προβλήματα τη σχέση που συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά.
- Σ.Δ.9.1. Να διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους.

Επίσης, αναφέρονται ενδεικτικές δραστηριότητες που έχουν αφετηρία πραγματικά προβλήματα, όπως:

- Αμφισβήτηση της ερμηνείας στατιστικών διαγραμμάτων με τρόπο παραπλανητικό. Τεκμηρίωση της αμφισβήτησης αυτής (π.χ. ένα στατιστικό διάγραμμα παρουσιάζεται

και ερμηνεύεται παραπλανητικά και συνοδεύεται από μια είδηση. «Γιατί είναι παραπλανητική και λανθασμένη η ερμηνεία του διαγράμματος; Πώς θα μπορούσε να διατυπωθεί η είδηση ώστε να είναι αληθής;»). [Β' τάξη]

- Επίλυση προβλημάτων υπολογισμού του εμβαδού επιφάνειας σύνθετων στερεών σχημάτων, όπως για παράδειγμα το κόστος υλικού βαψίματος της σχολικής αίθουσας ή του σχολείου. [Γ' τάξη]

4.3 Εμπλουτισμός της διδασκαλίας για την προώθηση του μαθηματικού εγγραμματισμού

Η αυξανόμενη έμφαση στον μαθηματικό εγγραμματισμό που δίνουν διεθνώς και στην Ελλάδα τα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών και η έρευνα στην Μαθηματική Εκπαίδευση, αναδεικνύουν την ανάγκη να **εμπλουτιστεί η διδασκαλία των μαθηματικών με προβλήματα του πραγματικού κόσμου** και **οι μαθητές να έχουν περισσότερες ευκαιρίες να αναπτύξουν τον μαθηματικό συλλογισμό, να επιλύσουν προβλήματα και να συζητήσουν με τους συμμαθητές τους για αυτά**. Σε κάθε περίπτωση, μερικές διδακτικές πρακτικές που μπορούν να αξιοποιηθούν (μεταξύ άλλων) στην κατεύθυνση αυτή είναι:

- Η *εισαγωγή μιας νέας έννοιας μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα* (όπως, ενδεικτικά, στις προτάσεις της 4.5.2 και της 4.5.6, και η εισαγωγή της ευκλείδειας διαίρεσης με το θέμα «Κορδέλα με αριθμούς» της πλατφόρμας skills4life.
- Η *αφιέρωση χρόνου στην επίλυση πραγματικού προβλήματος*, κάτι που απαιτεί – μεταξύ άλλων – τον εντοπισμό των σχετικών πληροφοριών ανάμεσα σε άσχετες και την αναγνώριση παραδοχών (όπως, ενδεικτικά, στην πρόταση της 4.5.3, στο θέμα «Καρέτα-καρέτα» και στο θέμα «Υπογεννητικότητα» της πλατφόρμας skills4life.
- *Η αφιέρωση χρόνου στις διαφορετικές διεργασίες στις οποίες εμπλέκεται ένα άτομο κατά την επίλυση προβλήματος*. Οι διεργασίες αυτές είναι οι εξής:

  α) Η κατανόηση του προβλήματος και η επιλογή των Μαθηματικών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυσή του.

  β) Η εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών, γεγονότων και εργαλείων για την παραγωγή ενός αποτελέσματος.

γ) Ο έλεγχος και η ερμηνεία του αποτελέσματος στο πλαίσιο του πραγματικού προβλήματος. Επειδή απαιτείται πολύς χρόνος για την εμπλοκή σε όλες αυτές τις διεργασίες στο ίδιο πρόβλημα, μπορεί να επιλέγονται και θέματα που περιλαμβάνουν μόνο μία από τις διεργασίες (όπως, ενδεικτικά, στην πρόταση της 4.5.2 για τη διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά, στη 2η ερώτηση της πρότασης της 4.6.6 για την εφαρμογή και χρήση των μαθηματικών, και στη 2η και 3η ερώτηση της πρότασης της 4.5.4 για την ερμηνεία και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων).

- Η *αξιολόγηση από τους μαθητές ισχυρισμών* που έχουν διατυπωθεί από άλλους (όπως, ενδεικτικά, φαίνεται στη διδακτική διαχείριση της πρότασης της 4.5.1 και στο θέμα «Ληστείες» της πλατφόρμας skills4life).
- Η *συχνή χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων για ένα πρόβλημα, για μια έννοια ή για μια διαδικασία* (όπως, ενδεικτικά, στην πρόταση της 4.5.4, στο θέμα «Πωλήσεις DVD» της πλατφόρμας skills4life και στο θέμα «Δεξαμενές νερού», επίσης της πλατφόρμας skills4life).
- Η *συνεργασία των παιδιών σε μικρές ομάδες για την επίλυση προβλημάτων* και την εμπλοκή τους με προκλητικά μαθηματικά έργα, δηλαδή με απαιτητικά προβλήματα (όπως, ενδεικτικά, προτείνεται να εργαστούν τα παιδιά στις προτάσεις των 4.5.3, 4.5.5 και 4.5.6 και όπως στο θέμα «Σχήματα» της πλατφόρμας skills4life).
- Η αφιέρωση χρόνου για *να επιχειρηματολογούν, να εξηγούν, να κάνουν κριτική και να υπερασπίζονται έναν ισχυρισμό* τα ίδια τα παιδιά (όπως, ενδεικτικά, στις προτάσεις της 4.5.5 και της 4.5.6 και στο θέμα «Πάντα - μερικές φορές - ποτέ» της πλατφόρμας skills4life).
- Η *διερεύνηση από τα παιδιά ιδιοτήτων και σχέσεων και η διατύπωση εικασιών* (όπως, ενδεικτικά, στις προτάσεις της 4.5.2 και 4.5.6).
- Η *χρήση τεχνολογικών εργαλείων* (π.χ. λογιστικά φύλλα, δυναμικό λογισμικό γεωμετρίας, εφαρμογές προσομοίωσης) *για την αναπαράσταση και τη διερεύνηση προβλημάτων* (όπως, ενδεικτικά, στην πρόταση της 4.5.2, στην πρόταση της 4.5.6 στο παράδειγμα της 2.5.6 και στο θέμα «Ποδήλατο στην πλατεία» της πλατφόρμας skills4life.
- Η *σύνδεση μαθηματικών εννοιών με άλλα γνωστικά αντικείμενα* (όπως π.χ. οι φυσικές επιστήμες, η οικονομία, η γεωγραφία) ή με κοινωνικά ζητήματα, ώστε να

κατανοούν οι μαθητές τον ρόλο των Μαθηματικών σε διαφορετικά πλαίσια (όπως, ενδεικτικά, στα παραδείγματα των 2.5.1 και 2.5.6, στην πρόταση της 4.5.4 και στο θέμα «Σεισμός» της πλατφόρμας skills4life).

- Η *ενθάρρυνση των μαθητών να δημιουργούν τα δικά τους προβλήματα*, βασισμένα σε πραγματικές καταστάσεις που τους ενδιαφέρουν, και να τα λύνουν οι ίδιοι ή οι συμμαθητές τους (όπως, ενδεικτικά, στην επέκταση της πρότασης της 4.5.5).
- Η *ανάλυση λανθασμένων απαντήσεων ή εναλλακτικών λύσεων* ως αφορμή για συζήτηση και ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού (όπως, για παράδειγμα, αναφέρεται στην πρόταση διδακτικής διαχείρισης της 4.5.1 και στην ερώτηση 3 του θέματος «Αξία μεταχειρισμένου αυτοκινήτου» της πλατφόρμας skills4life).
- Η *καλλιέργεια κουλτούρας συζήτησης και αποδοχής διαφορετικών απόψεων* και διαμόρφωση ασφαλούς κλίματος, ώστε οι μαθητές να διατυπώνουν, να εκφράζουν τις ιδέες τους και την ανατροφοδότηση προς τους συμμαθητές τους (όπως, ενδεικτικά, στις προτάσεις των 4.5.1, 4.5.3 και 4.5.6). Αυτό μπορεί να βοηθά στη μείωση του άγχους και του φόβου.
- Η *ενσωμάτωση δραστηριοτήτων ανοικτού τύπου, όπου δεν υπάρχει μία μοναδική σωστή απάντηση αλλά πολλές πιθανές προσεγγίσεις* (όπως, ενδεικτικά, στην πρόταση της 4.5.4 και στην 3η ερώτηση του θέματος «Το φως του φάρου» στην πλατφόρμα skills4life).
- Η *αξιοποίηση δεδομένων από την καθημερινή ζωή* (π.χ. στατιστικά από τον αθλητισμό, την κατανάλωση ενέργειας ή την κλιματική αλλαγή), ώστε οι μαθητές να εφαρμόζουν τα Μαθηματικά σε ρεαλιστικά σενάρια (όπως, ενδεικτικά, στο παράδειγμα 2.5.6, στις προτάσεις της 4.6.4 και της 4.6.5 και στο θέμα «Γρήγορη μόδα» της πλατφόρμας skills4life).
- Η *ενθάρρυνση της αυτοαξιολόγησης και του αναστοχασμού των μαθητών* σχετικά με τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν και τα αποτελέσματα που πέτυχαν (όπως, ενδεικτικά, στην πρόταση 4.5.2).
- Η *επιβράβευση έστω και μικρών επιτευγμάτων των παιδιών* και η αναγνώριση της προσπάθειας, ακόμα κι αν δεν έχει πλήρως σωστά και ολοκληρωμένα αποτελέσματα. Αυτό μπορεί να βοηθήσει στην προσπάθεια ενίσχυσης της αυτοπεποίθησης και του

αισθήματος αυτοαποτελεσματικότητας. Μια τέτοια πρακτική θα μπορούσε να αξιοποιηθεί στη διδακτική διαχείριση όλων των προτάσεων της 4.5.

- Αξιοποίηση της στρατηγικής της *κριτικής αποτίμησης μοντέλων*. Για αυτό θα πρέπει να σχεδιάζονται δραστηριότητες όπου οι μαθητές συγκρίνουν δύο διαφορετικές μαθηματικές διατυπώσεις για την ίδια κατάσταση και συζητούν ποια είναι πιο ρεαλιστική ή ποια είναι κατάλληλο μοντέλο της κατάστασης (όπως, ενδεικτικά, στην 1η ερώτηση της πρότασης της 4.6.5 και στην 3η ερώτηση της πρότασης της 4.6.10).

4.4 Ισότητα μαθησιακών ευκαιριών και πρόσβαση σε σύνθετα μαθηματικά

Σύμφωνα με τα ευρήματα τα οποία παρουσιάζονται στην ειδική έκδοση *PISA in Focus No 65*, σημαντικός παράγοντας που ενισχύει ή περιορίζει τις επιδόσεις των μαθητών είναι η έκθεσή τους σε σύνθετες μαθηματικές έννοιες και προβλήματα. Η διεθνής εμπειρία δείχνει ότι οι μαθητές που εργάζονται σε πιο απαιτητικές εργασίες αναπτύσσουν υψηλότερη αυτοπεποίθηση και καλύτερες επιδόσεις, ακόμη και αν προέρχονται από κοινωνικο-οικονομικά μειονεκτούντα περιβάλλοντα (OECD, 2016b). Ωστόσο, η απουσία υποστήριξης κατά την ενασχόληση με σύνθετα προβλήματα μπορεί να αυξήσει το άγχος για τα Μαθηματικά, ιδιαίτερα στους πιο αδύναμους μαθητές. Επιπλέον, σύμφωνα με το PISA in Focus No 63, τα δεδομένα καταδεικνύουν ότι οι κοινωνικο-οικονομικά μειονεκτούντες μαθητές εκτίθενται συστηματικά σε Μαθηματικά χαμηλότερης ποιότητας, γεγονός που διευρύνει το χάσμα με τους κοινωνικο-οικονομικά ευνοημένους συμμαθητές τους (OECD, 2016a). Συνεπώς, η διεύρυνση της πρόσβασης όλων των μαθητών σε ποιοτικό μαθηματικό περιεχόμενο, σε συνδυασμό με κατάλληλη υποστήριξη, αποτελεί κρίσιμη στρατηγική για τη βελτίωση των επιδόσεων και τη μείωση των ανισοτήτων.

Επιπλέον θα πρέπει να διευρυνθεί η **έκθεση των μαθητών και σε ορισμένα θέματα υψηλού βαθμού δυσκολίας** (ειδικά στα Μαθηματικά και τις Φ.Ε). Η διαρκής πτώση του επιπέδου (falling of standards) πιθανώς να οδηγεί μεγάλο ποσοστό των εκπαιδευτικών να αποφεύγουν να εκθέσουν τους μαθητές τους (έστω στο πλαίσιο μιας διαφοροποιημένης διδασκαλίας) σε τέτοιου είδους θέματα, στερώντας έτσι όμως τη δυνατότητα σε ορισμένους καλούς μαθητές να αναπτύξουν περαιτέρω το δυναμικό τους.

4.5 Παραδείγματα αξιοποίησης θεμάτων PISA στη διδασκαλία

Στα παρακάτω παραδείγματα αξιοποιούνται δημοσιευμένα θέματα του PISA (που βρίσκονται στην ιστοσελίδα του PISA: https://www.oecd.org/en/about/programmes/pisa.html) και θέματα που αναπτύχθηκαν στην Ελλάδα και ακολουθούν το πλαίσιο του PISA (και βρίσκονται στην ιστοσελίδα https://skills4life.gr/). Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αξιοποιήσουν και την εφαρμογή στον σύνδεσμο https://simulation.pisa4u.gr για τη δημιουργία φυλλαδίων εργασίας συνδυάζοντας θέματα της επιλογής τους (σχετικά με τις δυο τελευταίες εφαρμογές μπορείτε να ανατρέξετε για πιο αναλυτικές πληροφορίες στο κεφάλαιο 5).

4.5.1. Κλάσματα και ποσοστά (ρητοί αριθμοί) με το τριγωνικό μοτίβο

Το παράδειγμα 2.5.2, που υπάρχει παραπάνω (τριγωνικό μοτίβο, αποδεσμευμένο θέμα PISA), μπορεί να αξιοποιηθεί στην τάξη, είτε για τη συζήτηση των τρόπων με τους οποίους μπορεί να παρασταθεί ένας ρητός αριθμός είτε στο πλαίσιο διερεύνησης κανονικοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, τα ΠΜΑ που μπορεί να σχετιστούν με το έργο αυτό είναι τα παρακάτω:

- Αρ.Ρ.7.2. Να διερευνούν διαφορετικές αναπαραστάσεις ρητών αριθμών (δεκαδική, κλασματική) και να κάνουν μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη.
- Αλ.Κ.7.1. Να αναγνωρίζουν, να συγκρίνουν, να περιγράφουν κανονικότητες και να τις εκφράζουν ως αριθμητικές κανονικότητες με φυσικούς αριθμούς.
- Αλ.Κ.8.2. Να διατυπώνουν επιχειρήματα και να αιτιολογούν τους συλλογισμούς τους σχετικά με τον προσδιορισμό μιας κανονικότητας.

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας των ρητών αριθμών στην Α΄ Γυμνασίου, ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να θέσει το θέμα για συζήτηση στις ομάδες των μαθητών. Μια πιθανή διαχείριση του έργου και της δραστηριότητας των παιδιών θα μπορούσε να ξεκινά με το κάλεσμα στα παιδιά να συζητήσουν στις ομάδες τους και να απαντήσουν την πρώτη ερώτηση. Όσο οι ομάδες συζητούν, ο εκπαιδευτικός περνάει από τις ομάδες και παρακολουθεί τις συζητήσεις χωρίς να δίνει την απάντηση. Αν χρειάζεται, μπορεί να κάνει ερωτήσεις που βοηθούν τα παιδιά να εστιάσουν σε αυτό που πρέπει να βρουν για να υπολογίσουν το ζητούμενο ποσοστό.

Όταν οι ομάδες έχουν καταλήξει στην απάντηση, ο εκπαιδευτικός φέρνει για συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης τις ιδέες των παιδιών, ξεκινώντας από μη πλήρεις (ή μη ορθές) απαντήσεις. Μπορεί να ζητήσει από τις ομάδες να παρουσιάσουν την απάντηση, ζητώντας να πουν πώς κατέληξαν στην απάντησή τους. Προσπαθεί από τη συζήτηση να φανεί ότι το ποσοστό (37,5%), το κλάσμα ($\frac{6}{16}$) και ο δεκαδικός (0,375) εκφράζουν τον ίδιο αριθμό. Μπορεί επιπλέον να ζητήσει περισσότερους από έναν τρόπο εξήγησης της επιλογής 37,5%, προσδοκώντας την απάντηση ότι το ποσοστό αυτό είναι το μόνο ποσοστό που είναι μικρότερο από 50%, άρα είναι το μόνο που μπορεί να αντιστοιχεί στο ποσοστό των μπλε τριγώνων, αφού αυτά είναι λιγότερα από τα κόκκινα (ή είναι λιγότερα από τα μισά).

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να εξελιχθεί η δραστηριότητα στην δεύτερη ερώτηση. Εδώ ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να ανοίξει το θέμα της επέκτασης της κανονικότητας, ρωτώντας για παράδειγμα, πόσα κόκκινα τρίγωνα έχει η 5η γραμμή, η 6η γραμμή ή ακόμα και πόσα τρίγωνα θα έχει η 100ή γραμμή. Ανάλογα με την τάξη, αυτή η συζήτηση θα μπορούσε να οδηγήσει τα παιδιά να καταλήξουν σε έναν τύπο για το πλήθος των κόκκινων τριγώνων (ή των μπλε τριγώνων) που βρίσκονται σε κάθε γραμμή.

Στην τρίτη ερώτηση, ο εκπαιδευτικός, αφού παρατηρήσει τη συζήτηση και τις απαντήσεις των ομάδων, μπορεί να ζητήσει να διατυπώσουν την απάντησή τους ξεκινώντας από απαντήσεις που δεν είναι πλήρεις ή που έχουν κάποιο λάθος, ώστε να ξεκινήσει συζήτηση μεταξύ των παιδιών και να δοθεί η ευκαιρία να αναπτύξουν τις επιχειρηματολογίες τους.

4.5.2. Συναρτήσεις με το θέμα «αγοράζοντας αυτοκίνητο»

Η έννοια της συνάρτησης έρχεται ως ανάγκη να εκφράσουμε τη σχέση μεγεθών τα οποία συμμεταβάλλονται με τρόπο που το ένα να καθορίζει το άλλο. Το παράδειγμα 2.5.3, που υπάρχει παραπάνω («Αγοράζοντας αυτοκίνητο», αποδεσμευμένο θέμα PISA), μπορεί να αξιοποιηθεί για την εισαγωγή στις συναρτήσεις μέσα από πραγματικές καταστάσεις. Τα ΠΜΑ που συνδέονται με την προσέγγιση αυτή μπορεί να είναι τα παρακάτω:

- Αλ.Σρ.8.1. Να αναγνωρίζουν σε καταστάσεις της καθημερινότητας μεγέθη που συμμεταβάλλονται και να διακρίνουν ποιο μέγεθος καθορίζει το άλλο.
- Αλ.Σρ.8.3. Να εκφράζουν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γραφικά και συμβολικά (με τύπο).

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να απαντήσουν στο πρώτο ερώτημα χρησιμοποιώντας την προσομοίωση στα τάμπλετ ή στον διαδραστικό πίνακα ή στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου. Στη συνέχεια, μπορεί να τους ζητήσει να εργαστούν σε ομάδες, για να ανακαλύψουν ποιες πράξεις κάνει ο εκτιμητής κόστους. Επειδή αυτό δεν είναι εύκολο, θα πρέπει αφενός να δοθεί αρκετός χρόνος στις ομάδες να το συζητήσουν και αφετέρου να έχει γίνει προετοιμασία κάποιων ερωτήσεων που θα μπορούσαν να βοηθήσουν τα παιδιά να προσανατολιστούν. Για παράδειγμα, η προτροπή να καταγράψουν όλα τα ποσά που αποτελούν το κόστος του πρώτου χρόνου μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να κάνουν το πρώτο βήμα και στη συνέχεια να δοκιμάσουν, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του εκτιμητή κόστους με τα αποτελέσματα που βρίσκουν, υπολογίζοντας με την αριθμομηχανή.

Όταν οι ομάδες έχουν κάποια αποτελέσματα, μπορούν να τα παρουσιάσουν στην ολομέλεια της τάξης. Όσες δεν έχουν καταφέρει να φτάσουν στο τελικό αποτέλεσμα μπορούν να θέσουν τα ερωτήματά τους για συζήτηση με τις άλλες ομάδες. Ο αναστοχασμός και η συζήτηση για το πώς σκέφτηκαν οι διαφορετικές ομάδες (ανεξάρτητα από το πόσο «προχωρημένη» απάντηση επεξεργάστηκαν) μπορεί να προωθήσει την καλλιέργεια δεξιοτήτων αυτοαξιολόγησης και μεταγνωστικών ικανοτήτων.

Στη συνέχεια, θα μπορούσε να ζητηθεί από τις ομάδες να βρουν μία σχέση που να δίνει το κόστος του πρώτου χρόνου για το αυτοκίνητο Α, ανάλογα με την εκτιμώμενη απόσταση οδήγησης σε km. Αναμένεται τα παιδιά να διερευνήσουν και να κάνουν εικασίες για την κατάλληλη σχέση, ώστε να καταλήξουν στη σχέση $y = 8.000 + \frac{x}{100} \cdot 18{,}9 \cdot 1{,}54 + 250$ ή άλλη ισοδύναμή της, ή να διατυπώσουν τη διαδικασία υπολογισμού λεκτικά.

Μια επέκταση (ίσως για την Α’ Λυκείου) θα ήταν η διατύπωση μιας συνάρτησης για κάθε αυτοκίνητο (Α, Β, Γ και Δ). Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να αναδειχτεί η έννοια της παραμέτρου, εφόσον στην ίδια σχέση θα έχουμε διαφορετική τιμή αυτοκινήτου και διαφορετική κατανάλωση καυσίμου.

4.5.3. Ιδιότητες της μέσης τιμής με το θέμα «Πόντοι»

Το παράδειγμα 2.5.5 («Πόντοι», αποδεσμευμένο θέμα PISA), που αναφέρεται παραπάνω, μπορεί να αξιοποιηθεί στην τάξη για τη διερεύνηση της έννοιας της μέσης τιμής (μέσου

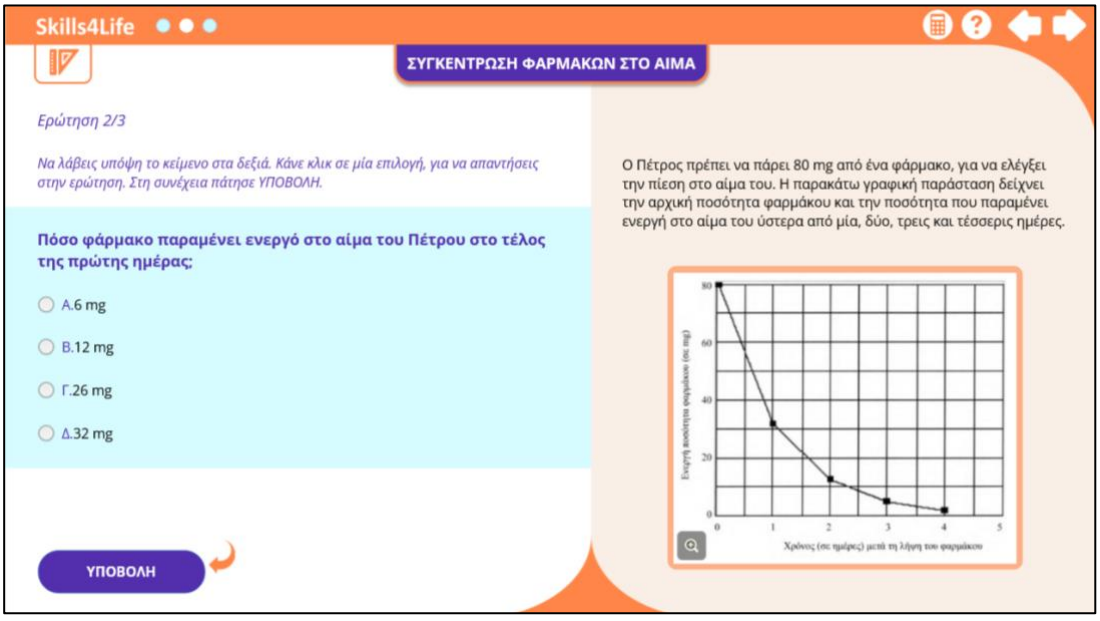
όρου) και παρανοήσεων που υπάρχουν σχετικά με αυτήν και για την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας. Πιο συγκεκριμένα, το ΠΜΑ που μπορεί να σχετιστεί με το έργο αυτό είναι το εξής:

- Σ.Μ.7.1. Να χρησιμοποιούν τα μέτρα θέσης για να περιγράψουν δεδομένα, να κάνουν συγκρίσεις και να εξαγάγουν συμπεράσματα.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά σε ομάδες να συζητήσουν, να συγκροτήσουν και να καταγράψουν την απάντησή τους. Παρακολουθώντας την εργασία των ομάδων, ο εκπαιδευτικός θα μπορεί στη συνέχεια να ζητήσει από τις ομάδες να παρουσιάσουν τις απαντήσεις τους ξεκινώντας από εκείνες που αναδεικνύουν παρανοήσεις ή/και ελλείψεις στην επιχειρηματολογία. Ο στόχος της συζήτησης στην τάξη θα πρέπει να είναι τα ίδια τα παιδιά να επιχειρηματολογήσουν για την άποψή τους και να καταλήξουν στην αποδεκτή απάντηση και επιχειρηματολογία.

Μια επέκταση με ανοικτή ερώτηση (δηλαδή ερώτηση που δέχεται διαφορετικές σωστές απαντήσεις) είναι να ζητηθεί από τα παιδιά να βρουν άλλες περιπτώσεις στις οποίες είναι γνωστή η μέση τιμή και να διατυπώσουν και να απαντήσουν το αντίστοιχο ερώτημα (αν είναι δυνατό όλες οι παρατηρήσεις να είναι διαφορετικές από τη μέση τιμή).

4.5.4. Πολλαπλές αναπαραστάσεις συνάρτησης με το θέμα «Συγκέντρωση φαρμάκων στο αίμα»



Το θέμα «Συγκέντρωση φαρμάκων στο αίμα» (αποδεσμευμένο θέμα PISA) μπορεί να αξιοποιηθεί για την εμπλοκή των μαθητών με την άντληση πληροφοριών και τις «μεταφράσεις» μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων συναρτήσεων. Ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει τη συγκέντρωση φαρμάκου δεν εμφανίζεται ούτε απαιτείται, εφόσον οι απαντήσεις μπορεί να δοθούν με βάση αναδρομικές σχέσεις (για παράδειγμα, «στο τέλος κάθε ώρας παραμένει ενεργό μόνο το 60% της πενικιλίνης που υπήρχε στο τέλος της προηγούμενης ώρας»). Έτσι, δεν απαιτείται να έχουν διδαχτεί την έννοια της συνάρτησης ή της γραφικής παράστασης αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή στη γραφική παράσταση. Συγκεκριμένα, τα ΠΜΑ που μπορεί να σχετιστούν με το έργο αυτό είναι τα παρακάτω:

- Αλ.Σρ.8.1. Να αναγνωρίζουν σε καταστάσεις της καθημερινότητας μεγέθη που συμμεταβάλλονται και να διακρίνουν ποιο μέγεθος καθορίζει το άλλο.
- Αλ.Σρ.8.3. Να εκφράζουν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γραφικά και συμβολικά (με τύπο).
- Αλ.Σρ.8.4. Να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και να μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν).

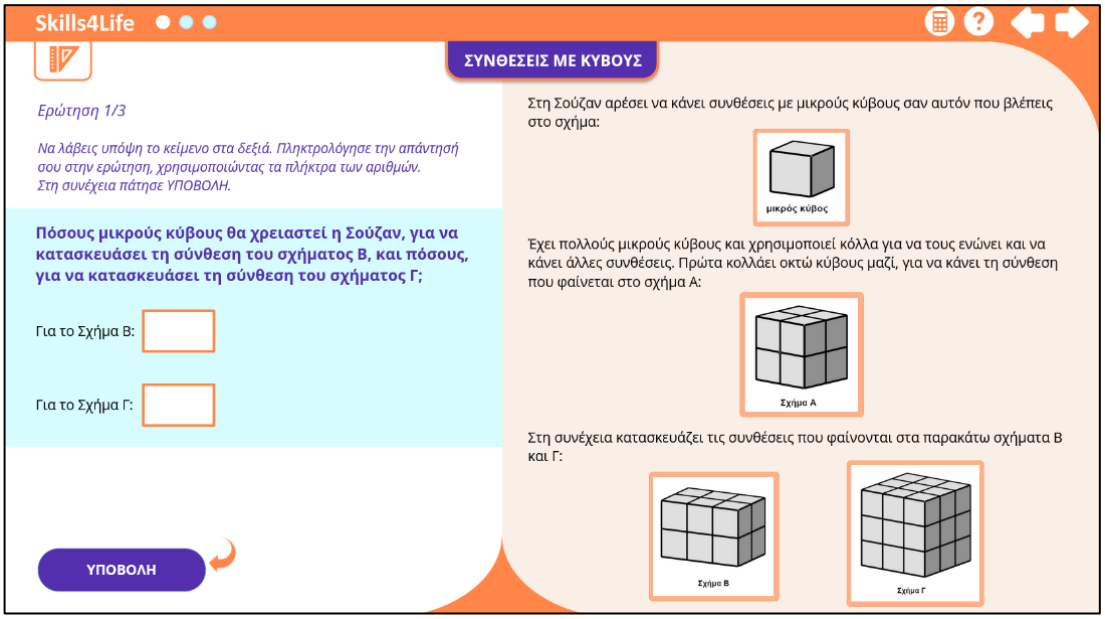
Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να απαντήσουν στην πρώτη ερώτηση και να συζητήσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους, με στόχο να διευκρινιστεί ο τρόπος με τον οποίο «λειτουργεί» η συγκεκριμένη σχέση. Στη συνέχεια θα μπορούσε να τα ρωτήσει ποια μεγέθη αλλάζουν και ποιο είναι εκείνο που καθορίζει το άλλο.

Στη δεύτερη και την τρίτη ερώτηση χρειάζεται τα παιδιά να αντλήσουν πληροφορίες από τη γραφική παράσταση. Εδώ η συζήτηση στην τάξη χρειάζεται να αναδείξει τον τρόπο με τον οποίο θα αντληθούν αυτές οι πληροφορίες από τη γραφική παράσταση, δηλαδή το «πού φαίνεται» η κάθε πληροφορία. Και πάλι, οι εξηγήσεις που δίνουν τα παιδιά μεταξύ τους μπορεί να είναι πολύ αποτελεσματικές στην κατανόηση του τρόπου μετάβασης από τη γραφική παράσταση σε αριθμητικές τιμές.

Μια πιθανή επέκταση (κυρίως για την Α΄ Λυκείου) θα μπορούσε να είναι η αναζήτηση ενός αναδρομικού τύπου αλλά και του τύπου μιας συνάρτησης που να εκφράζει την

ποσότητα του φαρμάκου που υπάρχει στο αίμα x ημέρες μετά από τη λήψη 80mg του συγκεκριμένου φαρμάκου (των ερωτήσεων 2 και 3).

4.5.5. Όγκος πρίσματος με το θέμα «Συνθέσεις με κύβους»



Το θέμα «Συνθέσεις με κύβους» (αποδεσμευμένο θέμα PISA) μπορεί να υποστηρίξει την οπτικοποίηση της έννοιας του όγκου ορθού πρίσματος και την ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας των παιδιών, εφόσον καλούνται να «φανταστούν» πόσοι κύβοι σε κάθε σχήμα είναι εσωτερικοί. Για τον λόγο αυτό, το θέμα αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί για την εισαγωγή στην έννοια του όγκου και στην «ανακάλυψη» του τύπου του όγκου ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Το ΠΜΑ που μπορεί να υποστηριχτεί από το έργο αυτό είναι το:

- Μ.Ο.9.1. Να υπολογίζουν τον όγκο του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει χρόνο στα παιδιά για να ασχοληθούν με κάθε ερώτηση και, πριν πάνε στην επόμενη, να συζητούν σε όλη την τάξη τις απαντήσεις τους. Εναλλακτικά, στον διαδραστικό πίνακα μπορεί να συζητά όλη η τάξη κάθε ερώτηση και την απάντησή της. Ο βαθμός δυσκολίας αυξάνεται και η τρίτη ερώτηση απαιτεί αφενός το παιδί να «φανταστεί» ένα σχήμα με διαστάσεις 6, 5 και 4 μικρούς κύβους, και αφετέρου να κάνει μια αριθμητική γενίκευση (για κάθε διάσταση, οι εσωτερικοί κύβοι είναι δύο λιγότεροι από τους

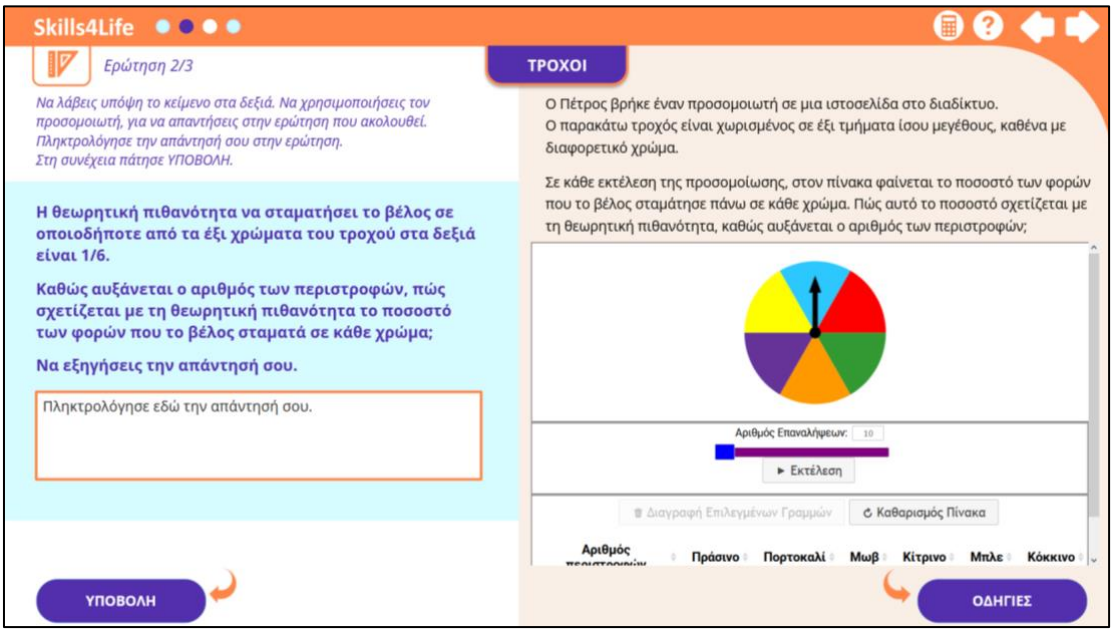
εξωτερικούς), για να καταλήξει στον αριθμό των «εσωτερικών» κύβων $(4 \cdot 3 \cdot 2)$. Εναλλακτικά, θα μπορούσε να μετρήσει τους εξωτερικούς κύβους, κάτι που απαιτεί δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης ή μια πρόχειρη σχεδίαση των τριών διαφορετικών όψεων του στερεού.

Επειδή αφενός ο βαθμός δυσκολίας αυξάνεται και αφετέρου υπάρχουν τα σχήματα που βοηθούν στην οπτικοποίηση των προβλημάτων, αναμένεται να μπορούν να εμπλακούν όλα τα παιδιά σε κάποιο μέρος ή και σε όλη τη μαθηματική δραστηριότητα. Ο εκπαιδευτικός αξιοποιεί αυτή την ευκαιρία για να αναδείξει τις λύσεις και τις στρατηγικές όλων των παιδιών και να τα ενθαρρύνει στις επόμενες γενικεύσεις τους.

Η βασική ιδέα που ο εκπαιδευτικός μπορεί να αξιοποιήσει για τη μετάβαση στον υπολογισμό του όγκου είναι ότι για τον υπολογισμό του πλήθους των κύβων μπορούμε να υπολογίσουμε τους κύβους της πρώτης «στρώσης» (της βάσης) και να πολλαπλασιάσουμε με το πλήθος των στρώσεων. Το επόμενο βήμα είναι η μετάβαση από τους κύβους στη χρήση μηκών με ακέραιο αριθμό μονάδων (πχ. 6m, 5m και 4m) και ένα τρίτο βήμα είναι η γενίκευση για οποιονδήποτε αριθμό ως μήκος (πχ. 6,2m, 5,8m και 3,9m). Προτείνεται όλες αυτές οι γενικεύσεις και τα βήματα να προκύπτουν από τις εξηγήσεις που δίνουν τα παιδιά στις ερωτήσεις του εκπαιδευτικού.

Μια επέκταση σε μια πιο ανοικτή δραστηριότητα είναι να ζητηθεί από τα παιδιά να φτιάξουν τα δικά τους προβλήματα και να ζητήσουν από τους συμμαθητές να τα λύσουν. Πιο συγκεκριμένα, να φτιάξουν σχήματα που μπορούν να κατασκευαστούν με τους κύβους της Σούζαν αλλά να είναι πιο πολύπλοκα από ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Η κατασκευή των σχημάτων μπορεί να περιλαμβάνει σχεδίαση ή/και περιγραφή.

4.5.6. Ο νόμος των μεγάλων αριθμών με το θέμα «Τροχοί»



Το θέμα «Τροχοί» (αποδεσμευμένο θέμα PISA) περιλαμβάνει έναν προσομοιωτή με τον οποίο ο μαθητής μπορεί να επαναλάβει ένα πείραμα 10, 50, 100, 500, 1.000, 5.000, 10.000 φορές. Στη δεύτερη ερώτηση το παιδί καλείται να εικάσει τον νόμο των μεγάλων αριθμών και στην τρίτη ερώτηση να τον χρησιμοποιήσει για να υπολογίσει το μέτρο σε μοίρες συγκεκριμένων κυκλικών τομέων. Με αυτό το θέμα μπορεί να υποστηριχτεί το ΠΜΑ:

- Π.Π.9.1. Να αναγνωρίζουν, μέσα από προσομοιώσεις με χρήση λογισμικού και εκτελώντας πειράματα τύχης, ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών).

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει χρόνο στα παιδιά για να ασχοληθούν με την πρώτη ερώτηση, στην οποία αναμένεται να αναγνωρίσουν ότι η πιθανότητα κάθε ενδεχομένου εξαρτάται από την επιφάνεια του χρώματος και, τελικά, από το μέτρο σε μοίρες των κυκλικών τομέων. Είτε στο εργαστήριο πληροφορικής είτε με χρήση τάμπλετ είτε στον διαδραστικό πίνακα της τάξης, τα παιδιά συζητούν σε ομάδες για να διατυπώσουν την επιχειρηματολογία τους. Ο εκπαιδευτικός παρακολουθεί την εργασία των ομάδων και όταν ολοκληρωθεί αυτή η φάση (για παράδειγμα ύστερα από 5’ συζήτησης στις ομάδες), φέρνει τη συζήτηση στην τάξη. Ζητάει πρώτα να επιχειρηματολογήσουν οι ομάδες που έχουν ελλιπή ή μη αποδεκτά επιχειρήματα και ζητάει από τις άλλες ομάδες να πουν τη γνώμη τους. Επειδή

η ερώτηση δεν απαιτεί προηγούμενες γνώσεις, μπορεί να λειτουργήσει ως «σημείο εισόδου» για παιδιά με διαφορετικές επιδόσεις. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τα παιδιά που μπορεί να δυσκολεύονται, κάνοντας ερωτήσεις όπως «στον τροχό αριστερά, ποια είναι η πιθανότητα το βέλος να σταματήσει στο μπλε κομμάτι;» ή «ποια είναι μεγαλύτερη, η πιθανότητα να σταματήσει στο μπλε ή να σταματήσει στο κόκκινο;».

Στην ερώτηση 2, οι ομάδες πειραματίζονται με τον προσομοιωτή και ο εκπαιδευτικός παρακολουθεί την εργασία τους και υποστηρίζει, αν και όπου χρειάζεται, χωρίς όμως να δίνει την απάντηση. Όταν ολοκληρώσουν την εργασία τους, καλούνται να παρουσιάσουν τις απαντήσεις τους στην τάξη. Η συζήτηση μεταξύ των παιδιών αναμένεται να καταλήξει στον νόμο των μεγάλων αριθμών (χωρίς να είναι αυστηρά διατυπωμένος). Επιπρόσθετα, αναμένεται κάποια παιδιά να παρατηρήσουν ότι, αν και η σχετική συχνότητα είναι κοντά σε μια τιμή (που είναι το 1/6 ή 16,7%), αυτή δεν είναι ίδια σε κάθε επανάληψη. Ο εκπαιδευτικός φροντίζει να αναδειχτεί και αυτή η πτυχή, η οποία είναι μια εκδήλωση της μεταβλητότητας των δεδομένων (μεταβλητότητα μεταξύ δειγμάτων).

Όπως στην ερώτηση 1, αναμένεται να μπορούν να εμπλακούν στη μαθηματική δραστηριότητα της ερώτησης 2 όλα τα παιδιά. Ακόμα κι αν κάποια παιδιά εκφράζονται με διαφορετικό βαθμό ακρίβειας και σαφήνειας ή αφήνουν κάποια κενά, ο εκπαιδευτικός αναδεικνύει τις προσπάθειές τους και τις απαντήσεις τους.

Στην ερώτηση 3, επειδή απαιτούνται επιπλέον γνώσεις γεωμετρίας (αν και είναι βασικές), είναι πιθανό κάποιες ομάδες παιδιών να δυσκολεύονται να ολοκληρώσουν την απάντησή τους. Και πάλι, ο εκπαιδευτικός μπορεί να αναδείξει την προσπάθειά τους, καλώντας τις να πουν τα συμπεράσματά τους (που πιθανώς να φτάνουν μέχρι την αναγνώριση του ποσοστού για το κίτρινο περίπου 40% και για το μωβ περίπου 20%).

4.6 Μια αντιστοίχιση θεμάτων με ενότητες διδασκαλίας και με ΠΜΑ του νέου ΠΣ

4.6.1. Ζάρια

(https://skills4life.gr/themata/M/M_101/story.html)

- Ενότητα ισχύοντος ΠΣ: Πιθανότητες Γ’ Γυμνασίου
- ΠΜΑ νέου ΠΣ:

- Π.Π.7.1. Να προσδιορίζουν και να περιγράφουν τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης που πραγματοποιείται σε ένα ή περισσότερα στάδια χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις του δειγματικού χώρου σε πίνακες ή δεντροδιαγράμματα.
- Π.Π.7.3. Να χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό των Πιθανοτήτων για να υπολογίσουν την πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχόμενου.
- Π.Π.9.1. Να αναγνωρίζουν μέσα από προσομοιώσεις με χρήση λογισμικού και εκτελώντας πειράματα τύχης, ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών).

4.6.2. Φορτηγό για μετακομίσεις

(https://pisa2022-questions.oecd.org/platform/index.html?user=&unit=MAT/MA118-MovingTruck&lang=ell-GRC)

- Ενότητα ισχύοντος ΠΣ: Γεωμετρικά στερεά - Μέτρηση στερεών Β’ Γυμνασίου
- ΠΜΑ νέου ΠΣ:
  - Μ.Ο.9.1. Να υπολογίζουν τον όγκο του κύβου και του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης.
  - Μ.Ο.9.4. Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού του όγκου σύνθετων στερεών σχημάτων αναπτύσσοντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.

4.6.3. Άθληση

(https://skills4life.gr/themata/M/M_77/story.html)

- Ενότητα ισχύοντος ΠΣ: Πιθανότητες Γ’ Γυμνασίου
- ΠΜΑ νέου ΠΣ:
  - Π.Π.7.3. Να χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό των Πιθανοτήτων για να υπολογίσουν την πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχόμενου.
  - Π.Σ.9.1. Να διερευνούν την ανεξαρτησία ενδεχομένων μέσα από την εκτέλεση πειραμάτων τύχης και προσομοιώσεων.

4.6.4. Εκδρομή τάξης

(https://skills4life.gr/themata/M/M_81/story.html)

- Ενότητα ισχύοντος ΠΣ: Συναρτήσεις Β' Γυμνασίου
- ΠΜΑ νέου ΠΣ:
  - Αλ.Σρ.8.3. Να εκφράζουν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γραφικά και συμβολικά (με τύπο).
  - Αλ.Σρ.8.4. Να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και να μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν).
  - Αλ.Σρ.8.12. Να επιλύουν (γραφικά και αλγεβρικά) προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης y=αx+β.

4.6.5. Γκαράζ

(https://skills4life.gr/themata/M/M_19/story.html)

- Ενότητα ισχύοντος ΠΣ: Εμβαδά και Πυθαγόρειο θεώρημα Β' Γυμνασίου, Μέτρηση (επιφάνειας) στερεών Β' Γυμνασίου
- ΠΜΑ νέου ΠΣ:
  - Γ.Ε.8.2. Να διερευνούν και να διατυπώνουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του και να τα χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό μηκών και τον προσδιορισμό ορθής γωνίας τριγώνου, αντίστοιχα.
  - Μ.Ε.8.7. Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού εμβαδού μεικτόγραμμων σχημάτων αξιοποιώντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.

4.6.6. Πίνακας τάξης

(https://skills4life.gr/themata/M/M_47/story.html)

- Ενότητα ισχύοντος ΠΣ: Πυθαγόρειο θεώρημα Β' Γυμνασίου
- ΠΜΑ νέου ΠΣ:

- Γ.Ε.8.2. Να διερευνούν και να διατυπώνουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του και να τα χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό μηκών και τον προσδιορισμό ορθής γωνίας τριγώνου, αντίστοιχα.

4.6.7. Πισίνα με ξαπλώστρες

(https://skills4life.gr/themata/M/M_4/story.html)

- Ενότητα ισχύοντος ΠΣ: Εμβαδά Β' Γυμνασίου
- ΠΜΑ νέου ΠΣ:
  - Μ.Ε.8.1. Να μετασχηματίζουν επιφάνειες σε ισοδύναμες με τη διαδικασία διάσπασης και ανασύνθεσης επιφάνειας.
  - Μ.Ε.8.7. Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού εμβαδού μεικτόγραμμων σχημάτων αξιοποιώντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.

4.6.8. Κόλπο με τη σκιά

(https://skills4life.gr/themata/M/M_42/story.html)

- Ενότητα ισχύοντος ΠΣ: Ομοιότητα τριγώνων Γ' Γυμνασίου
- ΠΜΑ νέου ΠΣ:
  - Γ.Μ.9.2. Να αναγνωρίζουν ως όμοια τα σχήματα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.

4.6.9. Εκδόσεις βιβλίων

(https://skills4life.gr/themata/M/M_1/story.html)

- Ενότητα ισχύοντος ΠΣ: Στατιστική Β' Γυμνασίου
- ΠΜΑ νέου ΠΣ:
  - Σ.Δ.8.3. Να κατασκευάζουν χρονοδιαγράμματα για χρονικά δεδομένα
  - Σ.Δ.8.5. Να επιλέγουν πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις συνεχών ποσοτικών και χρονικών δεδομένων και να καταλήγουν σε συμπεράσματα.

4.6.10. Επιδιόρθωση υπολογιστών στο σπίτι

(https://skills4life.gr/themata/M/M_6/story.html)

- Ενότητα ισχύοντος ΠΣ: Συναρτήσεις Β' Γυμνασίου, Συναρτήσεις Α' Λυκείου
- ΠΜΑ νέου ΠΣ:
  - Αλ.Σρ.8.1. Να αναγνωρίζουν σε καταστάσεις της καθημερινότητας μεγέθη που συμμεταβάλλονται και να διακρίνουν ποιο μέγεθος καθορίζει το άλλο.
  - Αλ.Σρ.8.3. Να εκφράζουν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γραφικά και συμβολικά (με τύπο).
  - Αλ.Σρ.8.6. Να υπολογίζουν αλγεβρικά και να εκτιμούν γραφικά τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως.
  - Αλ.Σρ.10.1. Αναγνωρίζουν συναρτήσεις μέσα από καταστάσεις συμμεταβολής της καθημερινής ζωής και τις διακρίνουν από άλλες σχέσεις συμμεταβολής

Κεφάλαιο 5: Δύο βασικά εργαλεία για την υποστήριξη της διδασκαλίας με στόχο τον μαθηματικό εγγραμματισμό

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο του παρόντος Οδηγού θα παρουσιαστούν δύο βασικά εργαλεία τα οποία, όπως ήδη αναφέρθηκε, έχουν αναπτυχθεί με στόχο να υποβοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς στα σχολεία να εφαρμόσουν διδακτικές στρατηγικές οι οποίες προωθούν το στόχο της ενίσχυσης του επιπέδου του μαθηματικού εγγραμματισμού, όπως αυτός υπαγορεύεται τόσο από τα Νέα Προγράμματα Σπουδών όσο και από το πλαίσιο αξιολόγησης της έρευνας PISA. Τα δυο αυτά εργαλεία είναι:

α) η Τράπεζα Θεμάτων Skills4Life και

β) η πλατφόρμα προσομοίωσης διαδικασιών αξιολόγησης του επιπέδου του μαθηματικού εγγραμματισμού των μαθητών (simulation skills4life)

5.1 Τι είναι η Τράπεζα Θεμάτων Skills4Life;

SCAN ME

Το Skills4Life είναι μια ανοιχτή τράπεζα θεμάτων και διδακτικών πόρων σε τρία γνωστικά αντικείμενα: **Φυσικές Επιστήμες**, **Μαθηματικά**, **Κατανόηση Κειμένου**. Κάθε «Θέμα» συνοδεύεται από περιγραφή, μεταδεδομένα (επίπεδο δυσκολίας, τύπο ερωτήσεων, δεξιότητες, πλαίσιο εφαρμογής, κ.ά.) και συνδέσμους σε υλικό ή/και προσομοιώσεις. Συνολικά υπάρχουν 240 θέματα, 80 σε κάθε αντικείμενο.

Το σκεπτικό της δημιουργίας του skills4life.gr ήταν όχι απλώς η εξοικείωση με θέματα τύπου PISA αλλά βαθύτερα η καλλιέργεια του μαθηματικού εγγραμματισμού. Όλα τα θέματα της πλατφόρμας αναπτύχθηκαν με λεπτομερή μελέτη και με έμφαση στις αρχές του μαθηματικού εγγραμματισμού, όπως αυτός αναπτύχθηκε στα πρώτα κεφάλαια του παρόντος οδηγού. Γι' αυτό και τα θέματα που περιέχονται στα Μαθηματικά δεν είναι απλώς εξεταστικά δοκίμια, κάτι σαν διαγωνίσματα, δηλαδή. Είναι, στην πραγματικότητα, μαθηματικά έργα για χρήση στη διδασκαλία: καθένα από αυτά μπορεί να αξιοποιηθεί σε μια διδασκαλία στην τάξη, με τις όποιες επιλογές χρήσης από τον διδάσκοντα, βέβαια, αλλά με φανερή τη δυνατότητα χρήσης να υπηρετούνται τα συγκεκριμένα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα που κάθε φορά επιλέγει ο εκπαιδευτικός.

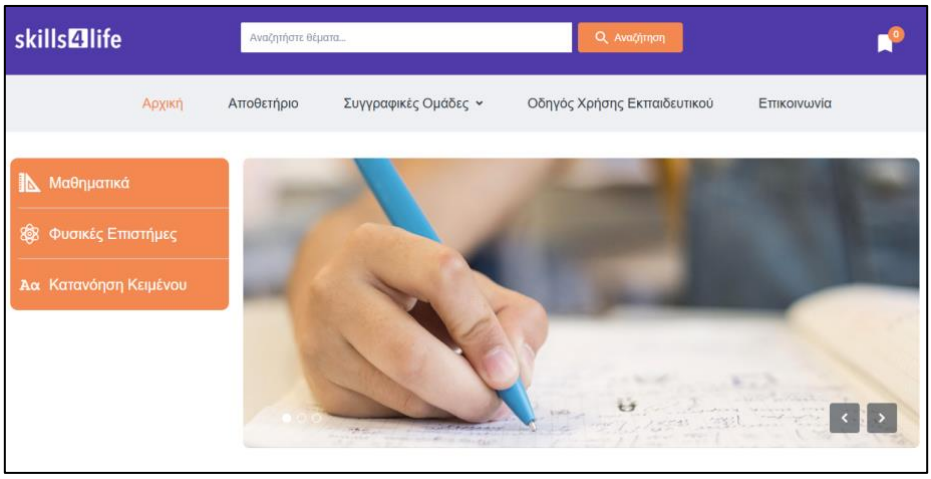
Όλα τα θέματα έχουν υλοποιηθεί σε ένα περιβάλλον πολύ φιλικό προς τον χρήστη, ώστε να μπορεί να προσελκύει το ενδιαφέρον των μαθητών, χωρίς παράλληλα να τους δυσκολεύει.

Υπάρχει σημαντικός αριθμός διαδραστικών θεμάτων και προσομοιώσεων, που βοηθούν όταν θέλουμε οι μαθητές να καταλάβουν «πώς δουλεύει κάτι» ή «πώς εξελίσσεται ένα φαινόμενο», «παίζοντας» με διάφορες παραμέτρους και βλέποντας αμέσως τι αλλάζει. Για παράδειγμα, στο θέμα «Ποδήλατο στην πλατεία» μπορούν, μετακινώντας έναν δρομέα, να δουν τη θέση του ποδηλάτη ως συνάρτηση του χρόνου και να προσδιορίσουν τον χρόνο που χρειάζεται για να διανύσει την πλατεία και την ταχύτητά του.

Τα σχετικά θέματα είναι χρήσιμα στην αρχή ενός μαθήματος, για να δούμε τι ήδη γνωρίζουν οι μαθητές, αλλά και στη διάρκειά του, για να κρατάει ο εκπαιδευτικός το ενδιαφέρον των μαθητών και να παρέχει γρήγορη ανατροφοδότηση, καθώς οι μαθητές μπορούν να δοκιμάζουν σενάρια και να εξηγούν τα αποτελέσματα με απλά λόγια.

Η δομή της αρχικής σελίδας της Τράπεζας έχει τρεις βασικές περιοχές:

- Το Κύριο οριζόντιο μενού, από όπου μπορεί κανείς να περιηγηθεί στην Αρχική σελίδα, το Αποθετήριο, να δει τις Συγγραφικές Ομάδες, τον Οδηγό Χρήσης και τους τρόπους Επικοινωνίας με τους διαχειριστές της πλατφόρμας.
- Η δεύτερη βασική περιοχή είναι στο κέντρο της σελίδας, από όπου μπορεί κανείς να έχει πρόσβαση σε δημοφιλή ή νέα θέματα (θέματα δηλαδή που έχουν πρόσφατα αναρτηθεί).
- Τέλος, από το μενού αριστερά μπορεί κανείς να επιλέξει γνωστικό αντικείμενο και να δει όλα τα θέματα που εμπίπτουν σε αυτό (βλ. Εικόνα 3).

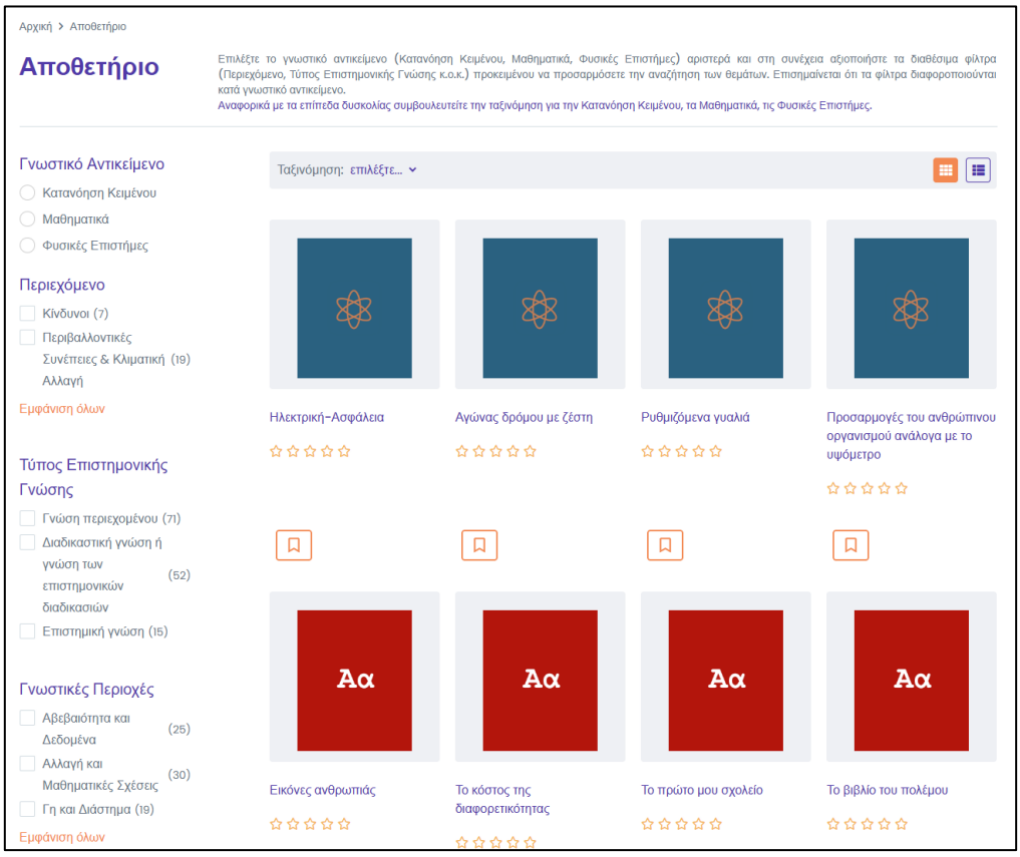


Εικόνα 3

Η πιο σύντομη διαδρομή την οποία μπορεί να ακολουθήσει κανείς προκειμένου να επιλέξει θέματα της αρεσκείας του είναι η ακόλουθη:

1. Ανοίγει το Αποθετήριο.
2. Επιλέγει Γνωστικό Αντικείμενο (π.χ. Μαθηματικά).
3. Χρησιμοποιεί 1–2 φίλτρα (π.χ. «Τύπος Θέματος → Προσομοίωση»).
4. Πατάει σε ένα Θέμα για να δει την περιγραφή και το κουμπί «Δείτε το Θέμα» (βλ. εικόνα 4).

Συμβουλή: Ξεκινήστε με λίγα φίλτρα. Αν έχετε πολλά, μειώστε τα για να δείτε περισσότερα αποτελέσματα.



Εικόνα 4

Προκειμένου κανείς να εντοπίσει το κατάλληλο θέμα το οποίο ανταποκρίνεται στις εκάστοτε διδακτικές ανάγκες του, κατ' αρχήν θα πρέπει πρώτα να λάβει υπόψη του τον στόχο του μαθήματος: με άλλα λόγια, θα πρέπει να σκεφθεί «Τι θέλω να πετύχουν οι μαθητές; (π.χ. «διατύπωση καταστάσεων με μαθηματικό τρόπο»)».

Στη συνέχεια, θα πρέπει ανάλογα με το επίπεδο της τάξης να ρυθμίσει το επίπεδο δυσκολίας των θεμάτων. Καλό είναι να ξεκινήσει κανείς με θέματα βαθμού δυσκολίας 1-3, και ανάλογα με τα αποτελέσματα μπορεί εν συνεχεία να αυξήσει τον βαθμό δυσκολίας. Τέλος, μπορεί να επιλέξει το κατάλληλο θέμα ανάλογα με τον τύπο του (θέμα που περιλαμβάνει απλό κείμενο, με στοιχεία διαδραστικότητας ή θέμα προσομοίωσης).

Τα διαθέσιμα φίλτρα διαφέρουν ανά γνωστικό αντικείμενο.
Συγκεκριμένα, για τα Μαθηματικά η επιλογή των θεμάτων μπορεί να γίνει με βάση τα ακόλουθα φίλτρα ή επιμέρους συνδυασμούς τους:

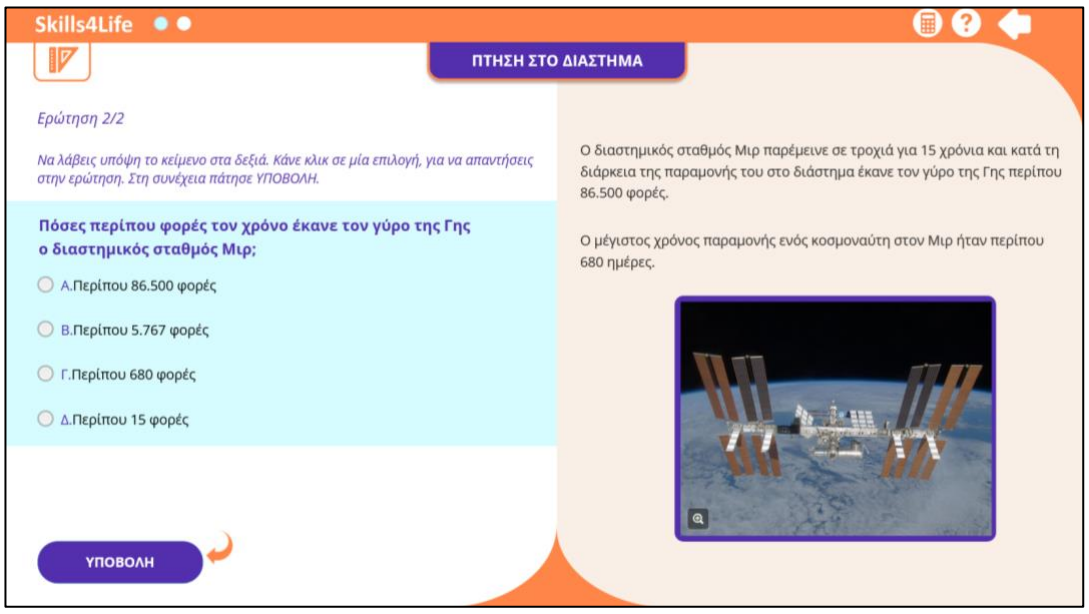
- **Γνωστικό Αντικείμενο**: Κατανόηση Κειμένου, Μαθηματικά, Φυσικές Επιστήμες
- **Γνωστικές Περιοχές**: Ποσότητα, Χώρος & Σχήμα, Αλλαγή και Μαθηματικές σχέσεις, Αβεβαιότητα και δεδομένα
- **Επιστημονική Δεξιότητα**: μαθηματικός συλλογισμός· διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά· εφαρμογή και χρήση μαθηματικών εννοιών, γεγονότων και διαδικασιών· ερμηνεία, εφαρμογή και αξιολόγηση των μαθηματικών αποτελεσμάτων.
- **Τύπος Θέματος**: Κείμενο, Διαδραστικό, Προσομοίωση
- **Επίπεδο Δυσκολίας**: 1–6. Η κλίμακα 1–6 περιγράφει την πολυπλοκότητα κατανόησης/δεξιοτήτων που απαιτούνται, με το 1 να αντιπροσωπεύει τα λιγότερο πολύπλοκα και το 6 τα πιο πολύπλοκα θέματα (βλ. παραπάνω την ενότητα 2.3).
- **Τύπος Απάντησης**: Απλή/Σύνθετη πολλαπλής επιλογής, Συμπλήρωση κενού, Σύντομης απάντησης
- **Πλαίσιο Εφαρμογής**: Επαγγελματικό, Επιστημονικό, Κοινωνικό, Προσωπικό.

Αφού επιλέξει κανείς το κατάλληλο για τις εκάστοτε διδακτικές ανάγκες θέμα, πατώντας πάνω σε αυτό εμφανίζει τη σελίδα του, η οποία περιλαμβάνει:

- **Τίτλο & Περιγραφή**: το εκπαιδευτικό σενάριο/δραστηριότητα και τους στόχους
- **Μεταδεδομένα**: τύποι ερωτήσεων (π.χ. Κείμενο, Προσομοίωση), αριθμός ερωτήσεων, επίπεδα δυσκολίας για τις επιμέρους ερωτήσεις που περιλαμβάνει το θέμα (π.χ. 3–4), γνωστικό αντικείμενο, επιστημονική δεξιότητα, γνωστικές περιοχές, πλαίσιο εφαρμογής, τύπος απάντησης (μορφή αξιολόγησης), πηγή, έκδοση.

Εν συνεχεία, πατώντας το κουμπί **«Δείτε το Θέμα»** μπορεί κανείς να έχει πρόσβαση στο υλικό/δραστηριότητα. Μπορεί επίσης, να **αξιολογήσει** το θέμα και να παρέχει ανατροφοδότηση σχετικά με την αρτιότητά του εισάγοντας το email του.

Η εμφάνιση όλων των θεμάτων, τα οποία περιλαμβάνουν επιμέρους ερωτήσεις, ακολουθεί μια κοινή λογική. Ειδικότερα, η οθόνη είναι χωρισμένη στη μέση: αριστερά υπάρχει η ερώτηση και στα δεξιά είναι το κείμενο ή η εικόνα ή η προσομοίωση με βάση τα οποία πρέπει να απαντηθεί η ερώτηση.[10] Το πλήθος των ερωτήσεων κάθε θέματος φαίνεται από τις κουκίδες πάνω αριστερά και μπορεί κανείς να περιηγηθεί ανάμεσα στις ερωτήσεις χρησιμοποιώντας τα βελάκια προς τα εμπρός ή προς τα πίσω. Όταν γίνει υποβολή της απάντησης, υπάρχει πάντα μια ανατροφοδότηση, είτε η απάντηση είναι αποδεκτή είτε μη αποδεκτή. Στη συνέχεια εμφανίζεται και ένα κουμπί με ανατροφοδότηση για τον εκπαιδευτικό, όπου παρέχονται περισσότερες πληροφορίες (π.χ. αναλύονται και οι περιπτώσεις μερικώς αποδεκτών απαντήσεων εκ μέρους των μαθητών, γίνεται αναλυτικότερη αναφορά στα κριτήρια της αξιολόγησης της κάθε απάντησης, ενώ συχνά αναλύεται το τι υποδεικνύουν οι διάφορες απαντήσεις για τα γνωστικά κενά και τις ελλείψεις των μαθητών που τις δίνουν) (βλ. εικόνα 5).



Εικόνα 5

[10] Ο τρόπος παρουσίασης των θεμάτων στην πλατφόρμα skills4life ακολουθεί σε σημαντικό βαθμό το πρότυπο (interface) με το οποίο εμφανίζονται τα θέματα του γνωστικού τεστ της έρευνας PISA.

Τέλος, δίνεται η δυνατότητα να προσθέσει κανείς το θέμα στα **Αγαπημένα**, για να έχει γρήγορη πρόσβαση σε όσα θέματα χρησιμοποιεί συχνά, πατώντας την αντίστοιχη επιλογή, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα 6.



Εικόνα 6

Στη συνέχεια παρατίθεται ένα παράδειγμα διδακτικής αξιοποίησης της Τράπεζας για τη διδασκαλία των εμβαδών στα Μαθηματικά της Β' Γυμνασίου.

Παράδειγμα: Ενδεικτικό Σενάριο Χρήσης της εφαρμογής skills4life κατά τη διδασκαλία στο μάθημα των Μαθηματικών

Μαθηματικά – «Γκαράζ» (Γυμνάσιο/Λύκειο)
Χρησιμοποιήστε τα φίλτρα: Γνωστικό → Φυσικές Επιστήμες, Γνωστικές περιοχές → Χώρος και σχήμα, Τύπος Θέματος → Κείμενο.
Επιλέξτε το θέμα «Γκαράζ».
Στόχοι: Οπτικοποίηση, Εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος και υπολογισμός εμβαδών.

Μικρο-σενάριο (40'):

Ερώτηση 1: Εργασία των μαθητών σε ζεύγη.

Ερώτηση 2: Εργασία των μαθητών σε ομάδες (των 2 ή των 4). Παρουσίαση στην τάξη των στρατηγικών τους και συζήτηση.

Αναστοχασμός: Συζήτηση σχετικά με το πώς σκέφτηκαν τις πιθανές διαφορετικές στρατηγικές τους.

5.2 Τι είναι το περιβάλλον προσομοίωσης skills4life;

Η πλατφόρμα skills4life συνοδεύεται από ένα συμπληρωματικό εργαλείο, το https://simulation.pisa4u.gr/, το οποίο δίνει τη δυνατότητα εξατομίκευσης του υλικού που περιέχει η πλατφόρμα skills4life.gr. Στο https://simulation.pisa4u.gr/ ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να συνδυάσει διάφορα μέρη από διάφορα θέματα της πλατφόρμας skills4life.gr, και να δημιουργήσει έτσι τα δικά του θέματα, τα δικά του δηλαδή «πακέτα ερωτήσεων». Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να γίνει ακόμα πιο δημιουργική χρήση του υλικού αυτού, ακόμη και στην κατεύθυνση της διαθεματικότητας, που σχετίζεται και αυτή με τον εγγραμματισμό στη συνολική του διάσταση.



Η εφαρμογή simulation [https://simulation.pisa4u.gr/] αναπτύχθηκε με στόχο την εξοικείωση μαθητών και εκπαιδευτικών με δραστηριότητες καλλιέργειας κρίσιμων δεξιοτήτων.

Βασίζεται στο υλικό που είναι διαθέσιμο στην πλατφόρμα Skills4Life [https://skills4life.gr/] και επιτρέπει τη διδασκαλία αλλά και την αξιολόγηση θεμάτων κατανόησης κειμένου, μαθηματικών και φυσικών επιστημών μέσω διερευνητικής μάθησης και κριτικής επίλυσης καθημερινών προβλημάτων.

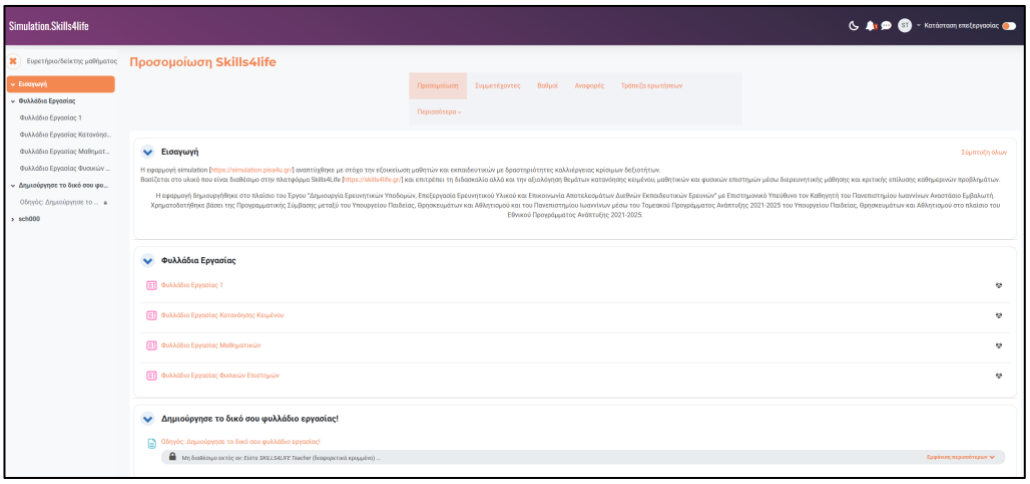
Είναι ουσιαστικά ένα εργαλείο για δημιουργία δραστηριοτήτων αξιολόγησης και τεστ με επιμέρους θέματα διαφόρων τύπων, συμπεριλαμβανομένων και διαδραστικών θεμάτων και προσομοιώσεων. Το πλεονέκτημα στην περίπτωση αυτή είναι ότι, εφόσον πρόκειται για δραστηριότητα κλειστού τύπου, οι μαθητές λαμβάνουν άμεση ανατροφοδότηση ύστερα από κάθε τους προσπάθεια. Κατά συνέπεια, η εν λόγω εφαρμογή προσομοίωσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί **πριν** από το μάθημα, για να διερευνήσει ο κάθε διδάσκων το τι ήδη γνωρίζουν και τι κενά μπορεί να έχουν οι μαθητές του (π.χ. μέσω 3–5 σύντομων ερωτήσεις). **Κατά τη διάρκεια** του μαθήματος, η χρήση της προσομοίωσης επιτρέπει σύντομους ελέγχους κατανόησης ή δραστηριότητες, όπου οι ομάδες δουλεύουν σε προσομοιώσεις και απαντούν σε ερωτήσεις. **Μετά** το μάθημα ή στο σπίτι, μπορεί να δοθεί ένα μικρό κουίζ, ώστε οι μαθητές να ξαναδούν τις έννοιες με τον δικό τους ρυθμό και να εξασκηθούν σε ενδιαφέρουσες δραστηριότητες.

Οι προσομοιώσεις κάνουν τις έννοιες πιο χειροπιαστές: ο μαθητής αλλάζει μια παράμετρο (όπως δύναμη, θερμοκρασία ή ποσοστό) και βλέπει τι συμβαίνει αμέσως στην

οθόνη. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στις Φυσικές Επιστήμες και τα Μαθηματικά, όπου συχνά μιλάμε για φαινόμενα που δεν γίνεται πάντα να τα δούμε ζωντανά στην τάξη. Επίσης, τα σύντομα επαναλαμβανόμενα κουίζ βοηθούν τη μνήμη: με λίγες ερωτήσεις ανά 2 ή 3 ημέρες, οι μαθητές θυμούνται καλύτερα και συνδέουν τις γνώσεις τους από διαφορετικά κεφάλαια.

Τέλος, το εργαλείο διευκολύνει την προσαρμογή στο επίπεδο κάθε μαθητή. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει πιο εύκολες ή πιο απαιτητικές εκδοχές της ίδιας θεματολογίας, να προσθέσει μικρές υποδείξεις, όπου χρειάζεται, και να παρουσιάσει το περιεχόμενο με διαφορετικούς τρόπους (κείμενο, εικόνες, προσομοίωση). Σε περίπτωση χρήσης του εργαλείου για προετοιμασία των μαθητών για εξετάσεις, προσφέρει «δοκιμαστικά» τεστ με χρονόμετρο και τυχαία σειρά ερωτήσεων, ενώ τα αποτελέσματα ανά ερώτηση δείχνουν πού υπάρχουν κενά. Έτσι, ο εκπαιδευτικός μπορεί να προσαρμόσει γρήγορα το επόμενο μάθημα με βάση πραγματικά δεδομένα.

Η αρχική σελίδα της εφαρμογής φαίνεται στην παρακάτω εικόνα 7:

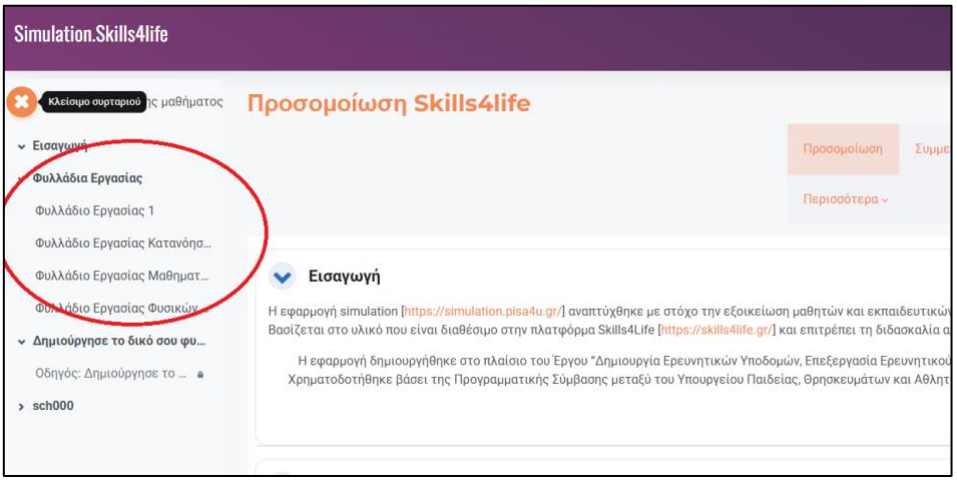


Εικόνα 7

Οι δυνατότητες που παρέχει η εφαρμογή για την καθημερινή εργασία των εκπαιδευτικών είναι οι εξής:

Χρήση των έτοιμων Φυλλαδίων Εργασίας (κουίζ)

Κάθε εκπαιδευτικός μπορεί να βρει έναν αριθμό έτοιμων φυλλαδίων εργασίας τα οποία αφορούν το μάθημά του όπως φαίνεται στο μενού πάνω αριστερά (βλ. Εικόνα 8). Αν και τα φυλλάδια είναι κοινά για όλα τα σχολεία, **μόνον οι εκπαιδευτικοί του κάθε επιμέρους σχολείου** μπορούν να δουν τις απαντήσεις των μαθητών τους.



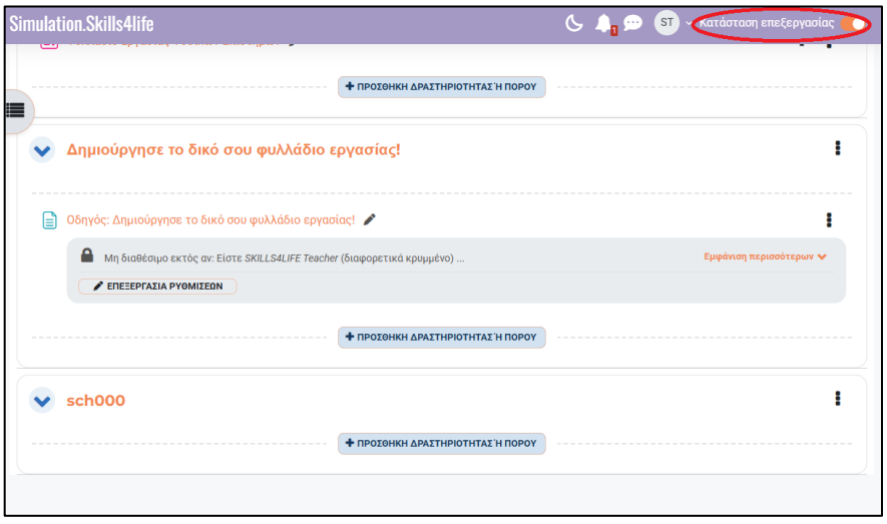
Εικόνα 8

Δημιουργία νέων κουίζ

Οι εκπαιδευτικοί του κάθε σχολείου μπορούν εκτός από το να αξιοποιούν τα έτοιμα φυλλάδια, τα οποία αναφέρθηκαν ήδη, να δημιουργούν δικά τους φυλλάδια εργασίας, επιλέγοντας τα θέματα και τις επιμέρους ερωτήσεις από κάθε θέμα τις οποίες θα ήθελαν να εντάξουν σε καθένα από αυτά τα φυλλάδια.

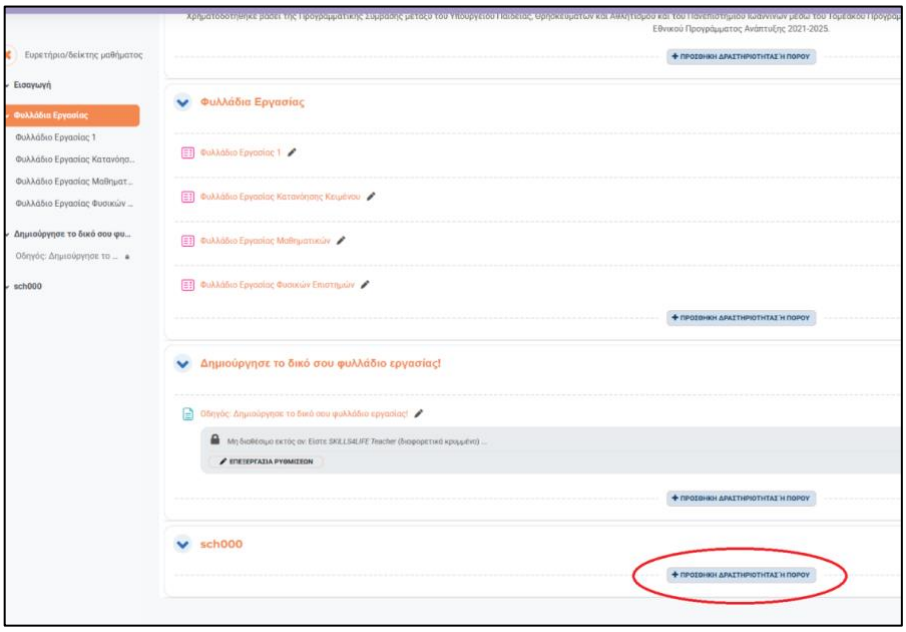
Προκειμένου να φτιάξουν οι εκπαιδευτικοί τα δικά τους φυλλάδια, διαθέσιμα μόνο στους μαθητές του σχολείου τους, θα πρέπει να ακολουθήσουν τα επόμενα βήματα:

1. Ενεργοποιήστε την επεξεργασία (κουμπί πάνω δεξιά) (βλ. Εικόνα 9).



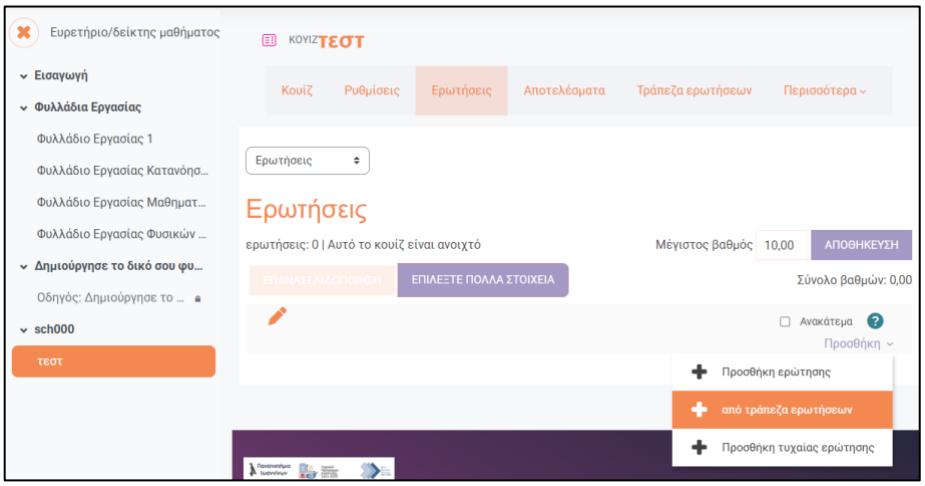
Εικόνα 9

2. Στην ενότητα του σχολείου (π.χ. sch0xx) πατήστε «Προσθήκη δραστηριότητας ή πόρου» και επιλέξτε «Κουίζ» από το αναδιπλούμενο μενού (βλ. Εικόνα 10).



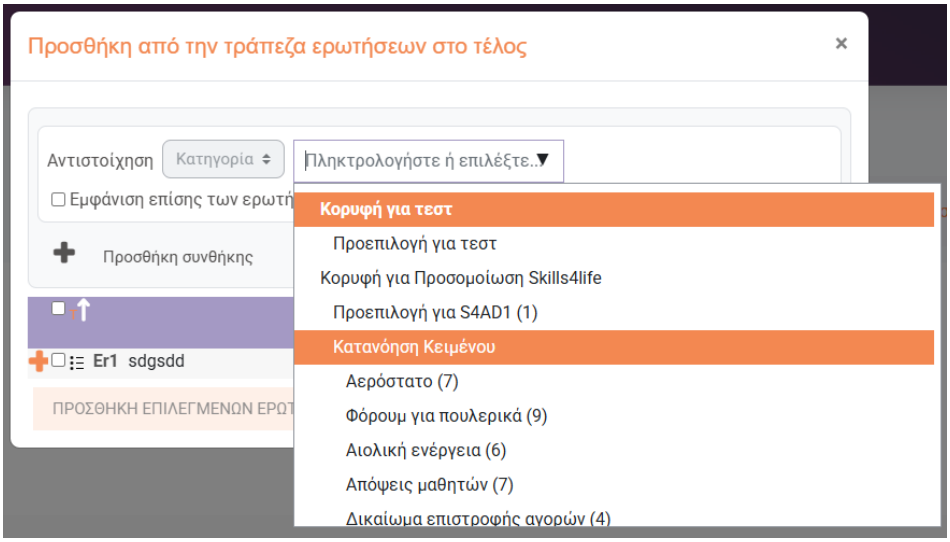
Εικόνα 10

3. Δώστε το όνομα που επιθυμείτε για το κουίζ και πατήστε «Αποθήκευση».
4. Επιλέξτε το κουίζ που δημιουργήσατε και πατήστε «Προσθήκη» → από «Τράπεζα ερωτήσεων», όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Στο σημείο αυτό μπορείτε να επιλέξετε ανάμεσα σε όλα τα θέματα της πλατφόρμας skills4life (βλ. Εικόνα 11).



Εικόνα 11

Αν γνωρίζετε το θέμα που θέλετε να προσθέσετε, πληκτρολογήστε το όνομά του στην αναζήτηση, αλλιώς κάντε αναζήτηση στη λίστα με όλα τα θέματα. Ο αριθμός που είναι στην παρένθεση δείχνει τον αριθμό των ερωτήσεων του θέματος (βλ. Εικόνα 12).



Εικόνα 12

5. Πατήστε εφαρμογή φίλτρων.
6. Μπορείτε να προσθέσετε ολόκληρο το θέμα ή να τσεκάρετε όσες ερωτήσεις επιθυμείτε με κλικ στο κουτάκι δίπλα σε κάθε ερώτηση. Πατήστε «Προσθήκη» στο κουίζ.

Πέραν των ανωτέρω οδηγιών μπορούν οι εκπαιδευτικοί να παρακολουθήσουν και σχετικό βίντεο που περιγράφει αναλυτικά τη διαδικασία ακολουθώντας από το μενού αριστερά το σύνδεσμο: «Οδηγός: Δημιούργησε το δικό σου φυλλάδιο εργασίας!»

Για κάθε σχολείο υπάρχει μια ενότητα με όνομα το ID που έχει δοθεί σε αυτό π.χ sch000, στην οποία έχουν πρόσβαση μόνον οι χρήστες του συγκεκριμένου σχολείου (εκπαιδευτικοί και μαθητές). Η προτροπή είναι να δημιουργείτε εκεί τα φυλλάδια εργασίας, ώστε να μην έχει άλλος πρόσβαση σε αυτά.

Σχετικό βίντεο με τη διαδικασία δημιουργίας φυλλαδίου εργασίας είναι διαθέσιμο εδώ.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- European Commission (2019). *PISA 2018 and the EU- Striving for social fairness through education,* Luxembourg: European Union. doi: 10.2766/964797
- European Commission (2023). *Education and Training Monitor 2023 – Country Report: Greece.* Retrieved from: https://op.europa.eu/webpub/eac/education-and-training-monitor/en/country-reports/greece.html
- Dweck, C. (2006), *Mindset: The New Psychology of Success*, Random House Publishing Group, New York.
- Fast, L. A., Lewis, J. L., Bryant, M. J., Bocian, K. A., Cardullo, R. A., Rettig, M., & Hammond, K. A. (2010). Does Math Self-Efficacy Mediate the Effect of the Perceived Classroom Environment on Standardized Math Test Performance?. *Journal of Educational Psychology, 102(3)*, 729-740.
- Liu, X., Hansen, K. Y., Valcke, M., & De Neve, J. (2024). A decade of PISA: student perceived instructional quality and mathematics achievement across European countries. *ZDM–Mathematics Education*, *56*(5), 859-891.
- Nolka, E., & Sofianopoulou, C. (2022). Greek and Portuguese Mathematics education and Performance, through the prism of PISA. In M. Carmo (Ed.*) Education Applications & Developments VII, Chapter 1* (pp. 3–12). Lisbon, InScience Press. https://doi.org/10.36315/2022ead01
- Nolka, E. (2025). Students' mathematics self-efficacy and mathematical literacy abilities. *International Conference on Education and New Developments 2025.* Budapest, Hungary. Education and New Developments 2025 - Volume 1
- OECD (2010). *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do: Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I)*. Paris: OECD Publishing.
- OECD. (2013). PISA 2012 Results: Ready to Learn: Students' Engagement, Drive and Self-Beliefs (Volume III). PISA, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264201170-en
- OECD (2014). *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I, Revised edition, February 2014*), PISA, OECD Publishing. *http://dx.doi.org/10.1787/9789264201118-en*
- OECD (2016a), "Are disadvantaged students given equal opportunities to learn mathematics?", *PISA in Focus*, No. 63, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/5jlwpxwblzjf-en.
- OECD (2016b), "Should all students be taught complex mathematics?", *PISA in Focus*, No. 65, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/5jlsh10gd6lr-en.
- OECD (2019a). PISA 2018 Results (Volume III): What School Life Means for Students' Lives. Paris: OECD. https://doi.org/10.1787/acd78851-en

- OECD. (2019b). *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do*. PISA, OECD Publishing, Paris. https://doi.org/10.1787/5f07c754-en
- OECD. (2019c). *PISA 2018 Results (Volume II): Where All Students Can Succeed*. Paris: OECD. https://doi.org/10.1787/b5fd1b8f-en
- OECD (2023a). *PISA 2022 Country Note: Greece.* Retrieved from: https://www.oecd.org/publication/pisa-2022-results/country-notes/greece-a24e696b
- OECD (2023b). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning Outcomes.* Retrieved from: https://www.oecd.org/pisa/publications/pisa-2022-results-volume-i-1f603c5c-en.htm
- OECD (2023). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework.* PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en
- OECD (2024c). *PISA 2022 Results (Volume V): Learning Strategies and Attitudes for Life.* PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/c2e44201-en
- Schleicher, A. (2023). *PISA 2022: Insights and interpretations.* OECD Publishing. Retrieved from https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/publications/support-materials/2023/12/pisa-2022-results-volume-i_76772a36/PISA%202022%20Insights%20and%20Interpretations.pdf
- Schmidt, W. et al. (2022), "When practice meets policy in mathematics education: A 19 country/jurisdiction case study", OECD Education Working Papers, No. 268, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/07d0eb7d-en.
- Stankov, L., Morony S., & Lee, Y. P. (2014) Confidence: the best non-cognitive predictor of academic achievement?. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology,* 34:1, 9-28, DOI: 10.1080/01443410.2013.814194
- Yeager, D. and G. Walton (2011), "Social-Psychological Interventions in Education", *Review of Educational Research*, Vol. 81/2, pp. 267-301, https://doi.org/10.3102/0034654311405999.
- Νόλκα, Ε. (2025), *Μαθηματικός Εγγραμματισμός. Σκιαγραφώντας το προφίλ των μαθητών και των μαθητριών*. Αθήνα, Εκδόσεις Παπαζήση.
- ΔΕΠΠΣ/ΑΠΣ Μαθηματικών 2003. Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών, ΦΕΚ 303/Β/13-3-2003. https://www.iep.edu.gr/defterovathmia-ekpaidefsi/
- Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των μαθηματικών στις Α', Β' και Γ' τάξεις Γυμνασίου, Δεύτερη έκδοση, Αθήνα 2022, https://www.iep.edu.gr/provoli-neon-programmaton-spoudon/

PISA 4U

ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων

Εθνικό Πρόγραμμα Ανάπτυξης 2021-2025

Τομεακό Πρόγραμμα Ανάπτυξης 2021 - 2025