

PISA

MATHEMATICAL FRAMEWORK



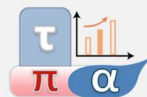
Πανεπιστήμιο
Ιωαννίνων



Εργαστήριο
Διδακτικής
& Σχολικής
Παιδαγωγικής
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Εθνικό
Πρόγραμμα
Ανάπτυξης
2021-2025



Τομεακό
Πρόγραμμα
Ανάπτυξης
2021 - 2025

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	5
Ορισμός του μαθηματικού εγγραμματος	12
Μια άποψη των μαθηματικά εγγράμματος ατόμων στην PISA 2022	16
Ρητή σύνδεση με ποικίλα πλαίσια για τα προβλήματα στο PISA 2022	24
Ορατός ρόλος των μαθηματικών εργαλείων, συμπεριλαμβανομένης της τεχνολογίας, στο PISA 2022	25
Οργάνωση του τομέα	26
Μαθηματικός συλλογισμός και διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων	28
Μαθηματικός συλλογισμός	28
Επίλυση προβλημάτων	38
Μαθηματικό Περιεχόμενο	44
Αλλαγή και σχέσεις	46
Χώρος και σχήμα	49
Ποσότητα	50
Αβεβαιότητα και δεδομένα	51
Πλαίσια για τα θέματα αξιολόγησης και επιλεγμένες δεξιότητες του 21 ^{ου} αιώνα	56
Πλαίσια	57
Δεξιότητες του 21 ^{ου} αιώνα	60
Αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματος	63
Δομή της αξιολόγησης μαθηματικών PISA 2022	63
Επιθυμητή κατανομή της βαθμολογίας ανά μαθηματικό συλλογισμό και διαδικασία επίλυσης προβλημάτων	63
Επιθυμητή κατανομή των μονάδων βαθμολογίας ανά κατηγορία περιεχομένου	65
Διαβάθμιση βαθμού δυσκολίας θεμάτων αξιολόγησης	67
Αξιολόγηση των μαθηματικών μέσω υπολογιστή	71
Σχεδιασμός των μαθηματικών του PISA 2022	74
Βαθμολόγηση των ερωτήσεων αξιολόγησης	76
Αναφορά επιπέδων μαθηματικής επάρκειας	77
Μαθηματικός εγγραμματος και ερωτηματολόγια υποβάθρου	80
Μαθηματικός συλλογισμός	82
Υπολογιστική σκέψη	83
Τέσσερις κεντρικοί τομείς περιεχομένου	84
Δεξιότητες του 21 ^{ου} αιώνα στο πλαίσιο των μαθηματικών	85
Συμπέρασμα	86
Αναφορές	87
Σημειώσεις	92
Ενδεικτικό θέμα	93

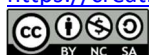
Επιστημονικός Υπεύθυνος:

Αναστάσιος Εμβολωτής, Καθηγητής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
Διευθυντής Εργαστηρίου Διδακτικής & Σχολικής Παιδαγωγικής

Επιστημονικοί Συνεργάτες:

Ελένη Νόλκα, Εκπαιδευτικός ΠΕ03

Το υλικό PISA4U διατίθεται με άδεια 'Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0'.
[ελεύθερη χρήση, αναπαραγωγή, αναδιανομή, παρουσίαση και αξιοποίηση, με την προϋπόθεση να μην
υπάρχει πρόθεση εμπορικής εκμετάλλευσης. Απαιτείται αναφορά του δημιουργού ή του δικαιούχου της
άδειας. Οποιοδήποτε παράγωγο έργο μπορεί να διανεμηθεί μόνο με την ίδια ή παρόμοια άδεια]
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>



Τα μαθηματικά είναι κύριο πεδίο αξιολόγησης του κύκλου 2022 του Προγράμματος για τη Διεθνή Αξιολόγηση των Μαθητών (PISA). Το πλαίσιο των Μαθηματικών που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο επικαιροποιήθηκε σημαντικά για την αξιολόγηση του PISA 2022. Το κεφάλαιο περιγράφει την "οργάνωση του πεδίου", σε τέσσερις διαστάσεις: α) μαθηματικό συλλογισμό και τις τρεις διαδικασίες β) τον τρόπο οργάνωσης του μαθηματικού περιεχομένου στο πλαίσιο του PISA 2022, γ) τη σχέση μεταξύ του μαθηματικού εγγραμματισμού και των δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα και δ) πλαίσια στα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν μαθηματικές προκλήσεις. Επιπλέον, το κεφάλαιο περιγράφει τις δομικές πτυχές της αξιολόγησης, συμπεριλαμβανομένου ενός σχεδίου δοκιμασίας και άλλων τεχνικών πληροφοριών. Στο τέλος του κεφαλαίου περιλαμβάνονται διάφορα δείγματα θεμάτων από την αξιολόγηση των Μαθηματικών.

Εισαγωγή

Η αξιολόγηση των μαθηματικών έχει ιδιαίτερη σημασία για το PISA 2022, καθώς είναι ο κύριος τομέας που αξιολογείται. Αν και αξιολογήθηκε από το PISA το 2000, το 2003, το 2006, το 2009, το 2012, το 2015 και το 2018, ο τομέας αυτός αποτέλεσε τον κύριο τομέα εστίασης μόνο το 2003 και το 2012.

Η επιστροφή των μαθηματικών ως κύριου τομέα στο PISA 2022 παρέχει την ευκαιρία να συνεχίσουμε κάνουμε συγκρίσεις των επιδόσεων των μαθητών με την πάροδο του χρόνου και να επανεξετάσουμε τι πρέπει να αξιολογηθεί υπό το πρίσμα των αλλαγών που έχουν συμβεί στον κόσμο, στον τομέα και στις διδακτικές πολιτικές και πρακτικές.

Κάθε χώρα έχει ένα όραμα για τη μαθηματική ικανότητα και οργανώνει τη σχολική της εκπαίδευση για να την επιτύχει ως αναμενόμενο αποτέλεσμα. Ιστορικά, η μαθηματική ικανότητα περιελάμβανε την εκτέλεση βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων ή πράξεων, όπως η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση ακέραιων αριθμών, δεκαδικών και κλασμάτων, ο υπολογισμός ποσοστών και ο υπολογισμός του εμβαδού και του όγκου απλών γεωμετρικών σχημάτων. Τα τελευταία χρόνια, η ψηφιοποίηση πολλών πτυχών της ζωής, η διάχυτη παρουσία δεδομένων στη λήψη προσωπικών αποφάσεων - αρχικά σε ζητήματα εκπαίδευσης και επαγγελματικού προσανατολισμού και, αργότερα στη ζωή, σε θέματα υγείας και επενδύσεων — καθώς και οι μεγάλες κοινωνικές προκλήσεις που σχετίζονται με την κλιματική αλλαγή, το δημόσιο χρέος, την αύξηση του πληθυσμού, την εξάπλωση πανδημικών ασθενειών και την παγκοσμιοποίηση της οικονομίας, έχουν αναδιαμορφώσει το τι σημαίνει να είναι κανείς μαθηματικά ικανός και να είναι επαρκώς εξοπλισμένος ώστε να συμμετέχει ως σκεπτόμενος, ενεργός και αναστοχαστικός πολίτης στον 21ο αιώνα.

Τα κρίσιμα ζητήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω, καθώς και άλλα που αντιμετωπίζουν οι κοινωνίες σε ολόκληρο τον κόσμο διαθέτουν όλα μία

ποσοτική διάσταση. Η κατανόησή τους, καθώς και η αντιμετώπισή τους, τουλάχιστον εν μέρει, προϋποθέτουν τον μαθηματικό εγγραμματισμό και τη μαθηματική σκέψη. Αυτή η μαθηματική σκέψη σε ολοένα και πιο σύνθετα πλαίσια δεν καθοδηγείται από την αναπαραγωγή των βασικών υπολογιστικών διαδικασιών που αναφέρθηκαν προηγουμένως, αλλά μάλλον από τον συλλογισμό¹ (τόσο παραγωγικό όσο και επαγωγικό). Ο σημαντικός ρόλος του συλλογισμού χρειάζεται μεγαλύτερη έμφαση στην κατανόηση του τι σημαίνει για τους μαθητές να είναι μαθηματικά εγγράμματοι. Εκτός από την επίλυση προβλημάτων, το παρόν πλαίσιο υποστηρίζει ότι ο μαθηματικός εγγραμματισμός στον 21ο αιώνα περιλαμβάνει τον μαθηματικό συλλογισμό και ορισμένες πτυχές της υπολογιστικής σκέψης.

Οι χώρες σήμερα αντιμετωπίζουν νέες ευκαιρίες και προκλήσεις σε όλους τους τομείς της ζωής, πολλές από τις οποίες απορρέουν από την ταχεία ανάπτυξη υπολογιστών και συσκευών όπως τα ρομπότ, τα smartphones και οι δικτυωμένες μηχανές. Για παράδειγμα, η συντριπτική πλειονότητα των νέων ενηλίκων και των φοιτητών που ξεκίνησαν το πανεπιστήμιο μετά το 2015 θεωρούσαν πάντα τα τηλέφωνα ως φορητές συσκευές χειρός με δυνατότητες ανταλλαγής φωνής, κειμένων και εικόνων καθώς και πρόσβασης στο διαδίκτυο - δυνατότητες που θεωρούνταν επιστημονική φαντασία από πολλούς από τους γονείς τους και σίγουρα από όλους τους παππούδες και τις γιαγιάδες τους (Beloit College, 2017[1]). Η αναγνώριση της αυξανόμενης ασυνέχειας του πλαισίου μεταξύ του προηγούμενου αιώνα και του μέλλοντος έχει προκαλέσει μια συζήτηση γύρω από την ανάπτυξη δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα στους μαθητές (Ananiadou and Claro, 2009[2]- Fadel, Bialik and Trilling, 2015[3]- National Research Council, 2012[4]- Reimers and Chung, 2016[5]).

Αυτή η ασυνέχεια είναι που οδηγεί επίσης στην ανάγκη για εκπαιδευτική μεταρρύθμιση και στην πρόκληση της επίτευξής της. Σε τακτά χρονικά διαστήματα, οι εκπαιδευτικοί, οι υπεύθυνοι χάραξης πολιτικής και άλλοι ενδιαφερόμενοι επανεξετάζουν τα πρότυπα και τις πολιτικές της δημόσιας εκπαίδευσης. Κατά τη διάρκεια αυτών των συζητήσεων δημιουργούνται νέες ή αναθεωρημένες απαντήσεις σε δύο γενικά ερωτήματα: 1) τι χρειάζεται να

μάθουν οι μαθητές και 2) ποιοι μαθητές χρειάζεται να μάθουν τι;. Το συχνότερα χρησιμοποιούμενο επιχείρημα για την υπεράσπιση της μαθηματικής εκπαίδευσης για όλους τους μαθητές είναι η χρησιμότητά της σε διάφορες πρακτικές καταστάσεις. Ωστόσο, αυτό και μόνο το επιχείρημα αποδυναμώνεται με τον χρόνο - πολλές απλές δραστηριότητες έχουν αυτοματοποιηθεί. Όχι και τόσο παλιά, οι σερβιτόροι στα εστιατόρια πολλαπλασίαζαν και πρόσθεταν σε χαρτί για να υπολογίσουν το πληρωτέο ποσό. Σήμερα απλώς πατούν πλήκτρα σε φορητές συσκευές. Ομοίως, μέχρι πρόσφατα οι άνθρωποι χρησιμοποιούσαν έντυπα ωρολόγια δρομολογίων για να προγραμματίσουν τα ταξίδια τους - διαδικασία που απαιτούσε καλή κατανόηση του άξονα του χρόνου και των ανισοτήτων, καθώς και ερμηνεία σύνθετων πινάκων διπλής εισόδου. Σήμερα μπορούμε απλά να κάνουμε μια άμεση έρευνα στο διαδίκτυο.

Όσον αφορά το ερώτημα "τι πρέπει να διδάξουμε", πολλές περιοριστικές αντιλήψεις προκύπτουν από τον τρόπο με τον οποίο τα μαθηματικά γίνονται αντιληπτά. Πολλοί άνθρωποι βλέπουν τα μαθηματικά μόνο ως μια χρήσιμη εργαλειοθήκη. Ένα σαφές ίχνος αυτής της προσέγγισης μπορεί να βρεθεί στα σχολικά προγράμματα σπουδών πολλών χωρών. Αυτά περιορίζονται μερικές φορές σε έναν κατάλογο από μαθηματικά θέματα ή διαδικασίες, με τους μαθητές να καλούνται να εξασκηθούν σε επιλεγμένα θέματα, σε προβλέψιμες καταστάσεις (συχνά τύπου εξετάσεων ή γραπτών δοκιμασιών). Αυτή η οπτική των μαθηματικών είναι πολύ στενή για τον σημερινό κόσμο. Παραβλέπει βασικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών που αποκτούν ολοένα και μεγαλύτερη σημασία. Παρά την παραπάνω παρατήρηση, υπάρχει ένας αυξανόμενος αριθμός χωρών που δίνουν έμφαση στον συλλογισμό και στη σημασία των σχετικών πλαισίων στα προγράμματα σπουδών τους. Ίσως αυτές οι χώρες να χρησιμεύσουν ως χρήσιμα πρότυπα για άλλες χώρες.

Τελικά, η απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα είναι ότι κάθε μαθητής πρέπει να μάθει (και να του δοθεί η ευκαιρία να μάθει) να σκέφτεται μαθηματικά, χρησιμοποιώντας μαθηματικό συλλογισμό (τόσο παραγωγικό όσο και επαγωγικό) σε συνδυασμό με ένα μικρό σύνολο θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών που υποστηρίζουν αυτόν τον συλλογισμό και οι οποίες δεν

διδάσκονται απαραίτητα ρητά, αλλά εκδηλώνονται και ενισχύονται κατά τη διάρκεια των μαθησιακών εμπειριών του μαθητή. Αυτό εξοπλίζει τους μαθητές με ένα εννοιολογικό πλαίσιο μέσω του οποίου μπορούν να αντιμετωπίσουν τις ποσοτικές διαστάσεις της ζωής στον 21ο αιώνα.

Το πλαίσιο PISA 2022 έχει σχεδιαστεί για να καταστήσει τη συνάφεια των μαθηματικών με τους 15χρονους μαθητές σαφέστερη και πιο ρητή, διασφαλίζοντας παράλληλα ότι τα θέματα (ή οι ερωτήσεις αξιολόγησης) που αναπτύσσονται παραμένουν σε ουσιαστικό και αυθεντικό πλαίσιο. Ο κύκλος μαθηματικής μοντελοποίησης, που χρησιμοποιήθηκε σε προηγούμενα πλαίσια (π.χ. OECD (2004[6]; 2013[7])) για να περιγράψει τα στάδια που διανύουν τα άτομα κατά την επίλυση προβλημάτων σε πλαίσιο, παραμένει βασικό χαρακτηριστικό του πλαισίου PISA 2022. Χρησιμοποιείται για να βοηθήσει στον καθορισμό των μαθηματικών διαδικασιών στις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές καθώς επιλύουν προβλήματα - διαδικασίες που μαζί με τον μαθηματικό συλλογισμό (τόσο παραγωγικό όσο και επαγωγικό) θα παρέχουν τις πρωταρχικές διαστάσεις αναφοράς.

Για το PISA 2022, η αξιολόγηση των μαθηματικών μέσω υπολογιστή (CBAM) θα είναι ο κύριος τρόπος διεξαγωγής για την αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματισμού. Ωστόσο, θα παρέχονται έντυπα μέσα αξιολόγησης για τις χώρες που επιλέγουν να μην εξετάζουν τους μαθητές τους μέσω υπολογιστή. Το πλαίσιο έχει επικαιροποιηθεί ώστε να αντικατοπτρίζει επίσης την αλλαγή στον τρόπο διεξαγωγής της αξιολόγησης που εισήχθη το 2015, συμπεριλαμβανομένης μιας συζήτησης των εκτιμήσεων που πρέπει να τροφοδοτήσουν την ανάπτυξη των θεμάτων CBAM, καθώς αυτή θα είναι η πρώτη σημαντική επικαιροποίηση του πλαισίου για τα μαθηματικά από τότε που εισήχθη η αξιολόγηση μέσω υπολογιστή στον PISA.

Η ανάπτυξη του πλαισίου του PISA 2022 λαμβάνει υπόψη την προσδοκία του ΟΟΣΑ ότι θα αυξηθεί η συμμετοχή στο PISA των χωρών χαμηλού και μεσαίου εισοδήματος. Ειδικότερα, το πλαίσιο του PISA 2022 αναγνωρίζει την ανάγκη να αυξηθεί η ανάλυση των αξιολογήσεων του PISA στο κατώτερο άκρο της κατανομής των επιδόσεων των μαθητών, αξιοποιώντας το πλαίσιο του PISA

for Development (OECD, 2017[8]) κατά την ανάπτυξη της αξιολόγησης, την ανάγκη να επεκταθεί η κλίμακα επιδόσεων στο κατώτερο άκρο, τη σημασία της καταγραφής ενός ευρύτερου φάσματος κοινωνικών και οικονομικών συνθηκών και την πρόβλεψη της ενσωμάτωσης μιας αξιολόγησης των παιδιών 14 έως 16 ετών που δεν φοιτούν στο σχολείο.

Ο αυξανόμενος και εξελισσόμενος ρόλος των υπολογιστών και των υπολογιστικών εργαλείων τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στα πλαίσια επίλυσης προβλημάτων μαθηματικού εγγραμματισμού αντικατοπτρίζεται στην αναγνώριση στο πλαίσιο του PISA 2022 ότι οι μαθητές θα πρέπει να διαθέτουν και να είναι σε θέση να επιδεικνύουν δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης, καθώς αυτές εφαρμόζονται στα Μαθηματικά ως μέρος της πρακτικής επίλυσης προβλημάτων. Οι δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης περιλαμβάνουν την αναγνώριση μοτίβων, τον σχεδιασμό και τη χρήση αφαίρεσης, την αποσύνθεση μοτίβων, τον προσδιορισμό των υπολογιστικών εργαλείων (εάν υπάρχουν) που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση ή την επίλυση ενός προβλήματος και τον καθορισμό αλγορίθμων ως μέρος μιας αναλυτικής λύσης. Με την ανάδειξη της σημασίας της υπολογιστικής σκέψης όπως αυτή εφαρμόζεται στα Μαθηματικά, το πλαίσιο προβλέπει τον προβληματισμό των συμμετεχουσών χωρών σχετικά με το ρόλο της υπολογιστικής σκέψης στα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών και στη διδακτική τους προσέγγιση.

Το πλαίσιο αξιολόγησης του PISA 2022 για τα Μαθηματικά είναι οργανωμένο σε τρεις μεγάλες ενότητες. Η πρώτη ενότητα, "Ορισμός του Μαθηματικού Εγγραμματισμού", εξηγεί το θεωρητικό υπόβαθρο της αξιολόγησης των μαθηματικών του PISA, συμπεριλαμβανομένου του επίσημου ορισμού του κατασκευάσματος του μαθηματικού εγγραμματισμού. Η δεύτερη ενότητα, "Οργάνωση του πεδίου αξιολόγησης", περιγράφει τέσσερις πτυχές: α) τον μαθηματικό συλλογισμό και τις τρεις μαθηματικές διαδικασίες (του κύκλου μοντελοποίησης/ επίλυσης προβλημάτων), β) τον τρόπο οργάνωσης του μαθηματικού περιεχομένου στο πλαίσιο του PISA 2022 καθώς και το μαθηματικό περιεχόμενο που είναι συναφές για την αξιολόγηση 15χρονων μαθητών, γ) τη σχέση μεταξύ του μαθηματικού εγγραμματισμού και των

λεγόμενων δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα και δ) τα πλαίσια στα οποία οι μαθητές θα αντιμετωπίσουν μαθηματικές προκλήσεις. Η τρίτη ενότητα, "Αξιολόγηση του Μαθηματικού Εγγραμματισμού", περιγράφει δομικά ζητήματα σχετικά με την αξιολόγηση, συμπεριλαμβανομένου του σχεδιασμού του τεστ και άλλων τεχνικών πληροφοριών.

Με στόχο τη διατήρηση της συγκρισιμότητας των αποτελεσμάτων, η πλειονότητα των θεμάτων του PISA 2022 θα είναι θέματα που έχουν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες αξιολογήσεις του PISA. Μια μεγάλη συλλογή δημοσιευμένων θεμάτων, βασισμένων στο προηγούμενο πλαίσιο είναι διαθέσιμη στη διεύθυνση <http://www.oecd.org/pisa/test>. Το παράρτημα Α παρέχει επτά ενδεικτικά θέματα που επιχειρούν να απεικονίσουν τα σημαντικότερα νέα στοιχεία του πλαισίου του 2022.

Το πλαίσιο 2022 συντάχθηκε υπό την καθοδήγηση της ομάδας εμπειρογνομόνων για τα μαθηματικά (MEG), ενός οργάνου που διορίστηκε από τον ανάδοχο του PISA για το πλαίσιο μαθηματικών (RTI International), σε διαβούλευση με το διοικητικό συμβούλιο του PISA (PISA Governing Board-PGB). Τα οκτώ μέλη της MEG περιλάμβαναν μαθηματικούς, στατιστικούς, καθηγητές μαθηματικών και εμπειρογνώμονες σε θέματα αξιολόγησης, τεχνολογίας και εκπαιδευτικής έρευνας από διάφορες χώρες. Το MEG υποστηρίχθηκε περαιτέρω από μια διευρυμένη ομάδα MEG (extended MEG-eMEG), αποτελούμενη από δέκα εμπειρογνώμονες που ενεργούσαν ως αξιολογητές ομότιμων της έκδοσης του πλαισίου που δημιουργήθηκε από τη MEG. Η eMEG περιλάμβανε εμπειρογνώμονες με ευρύ φάσμα εμπειρογνωμοσύνης στα μαθηματικά από διαφορετικές χώρες. Πρόσθετες αναθεωρήσεις έγιναν από εμπειρογνώμονες για λογαριασμό των 80 και πλέον χωρών που αποτελούν το Διοικητικό Συμβούλιο του PISA. Η RTI International, στο πλαίσιο της σύμβασης της με τον Οργανισμό Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (ΟΟΣΑ), διεξήγαγε δύο περαιτέρω ερευνητικές προσπάθειες: μια έρευνα επικύρωσης της εγκυρότητας του προσώπου μεταξύ εκπαιδευτικών, πανεπιστημίων και εργοδοτών και ένα γνωστικό εργαστήριο με 15χρονους σε διάφορες χώρες για να λάβει ανατροφοδότηση

από τους μαθητές σχετικά με τα ενδεικτικά θέματα που παρουσιάζονται στο πλαίσιο. Το έργο της MEG βασίζεται σε προηγούμενες εκδόσεις του πλαισίου των Μαθηματικών του PISA και ενσωματώνει τις συστάσεις της Στρατηγικής Συμβουλευτικής Ομάδας Μαθηματικών που συγκάλεσε ο ΟΟΣΑ το 2017.

Ορισμός του μαθηματικού εγγραμματισμού

Η κατανόηση των Μαθηματικών έχει κεντρική σημασία για την ετοιμότητα των νέων να συμμετάσχουν και να συνεισφέρουν στη σύγχρονη κοινωνία. Ένα αυξανόμενο ποσοστό προβλημάτων και καταστάσεων που συναντώνται στην καθημερινή ζωή, συμπεριλαμβανομένων των επαγγελματικών πλαισίων, απαιτούν κάποιο επίπεδο κατανόησης των Μαθηματικών προκειμένου να κατανοηθούν και να αντιμετωπιστούν κατάλληλα. Τα Μαθηματικά είναι ένα κρίσιμο εργαλείο για τους νέους καθώς αντιμετωπίζουν ένα ευρύ φάσμα θεμάτων και προκλήσεων στις διάφορες πτυχές της ζωής τους.

Επομένως, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε το βαθμό στον οποίο οι νέοι που ολοκληρώνουν τη σχολική τους εκπαίδευση είναι επαρκώς προετοιμασμένοι να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για να σκέφτονται για τη ζωή τους, να σχεδιάζουν το μέλλον τους και να συλλογίζονται και να επιλύουν σημαντικά προβλήματα που σχετίζονται με μια σειρά από σημαντικά ζητήματα της ζωής τους. Μια αξιολόγηση στην ηλικία των 15 ετών παρέχει στις χώρες μια πρώιμη ένδειξη του τρόπου με τον οποίο τα άτομα μπορεί να ανταποκριθούν στη μετέπειτα ζωή τους στο ποικίλο φάσμα καταστάσεων που θα συναντήσουν και οι οποίες περιλαμβάνουν μαθηματικά και βασίζονται στον μαθηματικό συλλογισμό (παραγωγικό και επαγωγικό) και στην επίλυση προβλημάτων για να κατανοήσουν.

Ως βάση για μια διεθνή αξιολόγηση 15χρονων μαθητών, είναι λογικό να αναρωτηθούμε: "Τι είναι σημαντικό να γνωρίζουν και να μπορούν να κάνουν οι πολίτες σε καταστάσεις που περιλαμβάνουν μαθηματικά;". Πιο συγκεκριμένα, τι σημαίνει να είσαι μαθηματικά ικανός για έναν 15χρονο, ο οποίος μπορεί να ολοκληρώνει τη σχολική του εκπαίδευση ή να ετοιμάζεται να ακολουθήσει πιο εξειδικευμένη εκπαίδευση για μια καριέρα ή για την εισαγωγή του σε πανεπιστήμιο; Είναι σημαντικό η έννοια του μαθηματικού εγγραμματισμού, η οποία χρησιμοποιείται σε αυτό το πλαίσιο για να υποδηλώσει την ικανότητα των ατόμων να συλλογίζονται μαθηματικά και να επιλύουν προβλήματα σε ποικίλα πλαίσια του 21^{ου} αιώνα, να μην

εκλαμβάνεται ως συνώνυμη με τις ελάχιστες ή χαμηλού επιπέδου γνώσεις και δεξιότητες. Αντίθετα, προορίζεται να περιγράψει τις *ικανότητες των ατόμων να συλλογίζονται μαθηματικά και να χρησιμοποιούν μαθηματικές έννοιες, διαδικασίες, γεγονότα και εργαλεία για να περιγράψουν, να εξηγούν και να προβλέπουν φαινόμενα*. Αυτή η αντίληψη του μαθηματικού εγγραμματισμού αναγνωρίζει τη σημασία του να αναπτύσσουν οι μαθητές μια ουσιαστική κατανόηση ενός ευρέως φάσματος μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών και να συνειδητοποιούν τα οφέλη από τη συμμετοχή τους στη διερεύνηση καταστάσεων του πραγματικού κόσμου που υποστηρίζονται από τα μαθηματικά. Η έννοια του μαθηματικού εγγραμματισμού, όπως ορίζεται από το PISA, υπογραμμίζει έντονα την ανάγκη να αναπτυχθεί η ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά σε πλαίσιο, και είναι σημαντικό να έχουν πλούσιες εμπειρίες στην τάξη των μαθηματικών για να το επιτύχουν αυτό. Αυτό ισχύει τόσο για τους 15χρονους μαθητές που πλησιάζουν στο τέλος της τυπικής μαθηματικής τους εκπαίδευσης, μαθητές που θα συνεχίσουν την τυπική μελέτη των μαθηματικών, καθώς και για τους 15χρονους που δεν φοιτούν σε σχολείο.

Ο μαθηματικός εγγραμματισμός υπερβαίνει τα ηλικιακά όρια. Για παράδειγμα, το Πρόγραμμα για τη Διεθνή Αξιολόγηση των Ικανοτήτων των Ενηλίκων (PIAAC) του ΟΟΣΑ ορίζει τον αριθμητισμό (numeracy) ως την *ικανότητα πρόσβασης, χρήσης, ερμηνείας και επικοινωνίας μαθηματικών πληροφοριών και ιδεών, προκειμένου να συμμετέχουν και να διαχειρίζονται τις μαθηματικές απαιτήσεις μιας σειράς καταστάσεων στην ενήλικη ζωή*. Οι παραλληλισμοί μεταξύ αυτού του ορισμού για τους ενήλικες και του ορισμού του μαθηματικού εγγραμματισμού του PISA 2022 για τους 15χρονους είναι τόσο έντονοι όσο και αναμενόμενοι.

Η αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματισμού για τους 15χρονους πρέπει να λαμβάνει υπόψη τα σχετικά χαρακτηριστικά αυτών των μαθητών- ως εκ τούτου, υπάρχει ανάγκη να προσδιοριστούν περιεχόμενο, γλώσσα και πλαίσια κατάλληλα για την ηλικία τους. Αυτό το πλαίσιο διακρίνει μεταξύ των γενικών κατηγοριών περιεχομένου που είναι σημαντικές για τον μαθηματικό εγγραμματισμό των ατόμων γενικά και των ειδικών θεμάτων περιεχομένου

που είναι κατάλληλα για 15χρονους μαθητές. Ο μαθηματικός εγγραμματισμός δεν αποτελεί ένα χαρακτηριστικό που ένα άτομο είτε διαθέτει είτε δεν διαθέτει. Αντίθετα, ο μαθηματικός εγγραμματισμός είναι ένα χαρακτηριστικό που βρίσκεται σε ένα συνεχές, με ορισμένα άτομα να είναι περισσότερο μαθηματικά εγγράμματα από άλλα - και με τη δυνατότητα ανάπτυξης να είναι πάντα παρούσα.

Για τους σκοπούς του PISA 2022, ο μαθηματικός εγγραμματισμός ορίζεται ως εξής:

Ο μαθηματικός εγγραμματισμός είναι η ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί μαθηματικό συλλογισμό και να διατυπώνει, να εφαρμόζει και να ερμηνεύει τις μαθηματικές γνώσεις για την επίλυση προβλημάτων σε μία ποικιλία καταστάσεων του πραγματικού κόσμου. Περιλαμβάνει έννοιες, διαδικασίες, γεγονότα και εργαλεία για την περιγραφή, εξήγηση και πρόβλεψη φαινομένων. Βοηθά τα άτομα να αναγνωρίζουν τον ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στον κόσμο ώστε να προβούν σε καλά τεκμηριωμένες κρίσεις και αποφάσεις οι οποίες είναι απαραίτητες σε δημιουργικούς, ενεργούς και σκεπτόμενους πολίτες του 21^{ου} αιώνα.

Το πλαίσιο του PISA 2022, σε σύγκριση με τα πλαίσια του PISA 2003 και του PISA 2012, ενώ αναγνωρίζει και διατηρεί τις βασικές ιδέες του μαθηματικού εγγραμματισμού που αναπτύχθηκαν σε αυτά, αναγνωρίζει ορισμένες αλλαγές στον κόσμο του μαθητή, οι οποίες με τη σειρά τους σηματοδοτούν μια αλλαγή στον τρόπο αξιολόγησης του μαθηματικού εγγραμματισμού σε σύγκριση με την προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε στα προηγούμενα πλαίσια. Η τάση είναι η απομάκρυνση από την ανάγκη εκτέλεσης βασικών υπολογισμών σε έναν ταχέως μεταβαλλόμενο κόσμο που καθοδηγείται από νέες τεχνολογίες και τάσεις, στον οποίο οι πολίτες είναι δημιουργικοί και ενεργοί, λαμβάνοντας αποφάσεις για τον εαυτό τους και την κοινωνία στην οποία ζουν.

Καθώς η τεχνολογία θα διαδραματίζει ολοένα και μεγαλύτερο ρόλο στη ζωή των μαθητών, η μακροπρόθεσμη πορεία του μαθηματικού εγγραμματισμού

θα πρέπει επίσης να περιλαμβάνει τη συνεργιστική και αμοιβαία σχέση μεταξύ της μαθηματικής και υπολογιστικής σκέψης, η οποία εισάγεται στο (Wing, 2006[9]) ως "ο τρόπος με τον οποίο σκέφτονται οι επιστήμονες πληροφορικής" και θεωρείται ως η διαδικασία σκέψης που συνεπάγεται η διατύπωση προβλημάτων και ο σχεδιασμός των λύσεών τους σε μια μορφή που μπορεί να εκτελεστεί από έναν υπολογιστή, έναν άνθρωπο ή έναν συνδυασμό και των δύο (Wing, 2011[10]) (Cuny, Snyder and Wing, 2010[11]). Οι ρόλοι που διαδραματίζει η υπολογιστική σκέψη στα μαθηματικά περιλαμβάνουν τον τρόπο με τον οποίο συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα αλληλεπιδρούν με συγκεκριμένα θέματα πληροφορικής και τον τρόπο με τον οποίο ο μαθηματικός συλλογισμός συμπληρώνει την υπολογιστική σκέψη (Gadanidis, 2015[12], Rambally, 2017[13]). Για παράδειγμα, οι Pratt και Noss (2002[14]) συζητούν τη ενός υπολογιστικού μικρόκοσμου για την ανάπτυξη μαθηματικών γνώσεων στην περίπτωση της τυχαιότητας και των πιθανοτήτων- οι Gadanidis κ.ά. (2018[15]) προτείνουν μια προσέγγιση για την εμπλοκή των μικρών παιδιών με ιδέες της θεωρίας ομάδων, χρησιμοποιώντας έναν συνδυασμό χειραπτικών εργαλείων και εργαλείων υπολογιστικής σκέψης. Ως εκ τούτου, ενώ η μαθηματική εκπαίδευση εξελίσσεται όσον αφορά τα διαθέσιμα εργαλεία και τους πιθανούς τρόπους υποστήριξης των μαθητών στην εξερεύνηση των ισχυρών ιδεών του κλάδου (Pei, Weintrop and Wilensky, 2018[16]), η προσεκτική χρήση εργαλείων και δεξιοτήτων υπολογιστικής σκέψης μπορεί να εμβαθύνει την εκμάθηση του περιεχομένου των μαθηματικών δημιουργώντας αποτελεσματικές συνθήκες μάθησης (Weintrop et al., 2016[17]). Επιπλέον, τα εργαλεία υπολογιστικής σκέψης προσφέρουν στους μαθητές ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούν να επαναπροσδιορίσουν αφηρημένες δομές (εξερευνώντας και εμπλεκόμενοι με μαθηματικές έννοιες με δυναμικό τρόπο) (Wing, 2008[18]), καθώς και να εκφράσουν ιδέες με νέους τρόπους και να αλληλεπιδράσουν με έννοιες μέσω ψηφιακών μέσων και νέων εργαλείων αναπαράστασης (Grover, 2018[19], Niemelä et al., 2017[20], Pei, Weintrop and Wilensky, 2018[16], Resnick et al., 2009[21]).

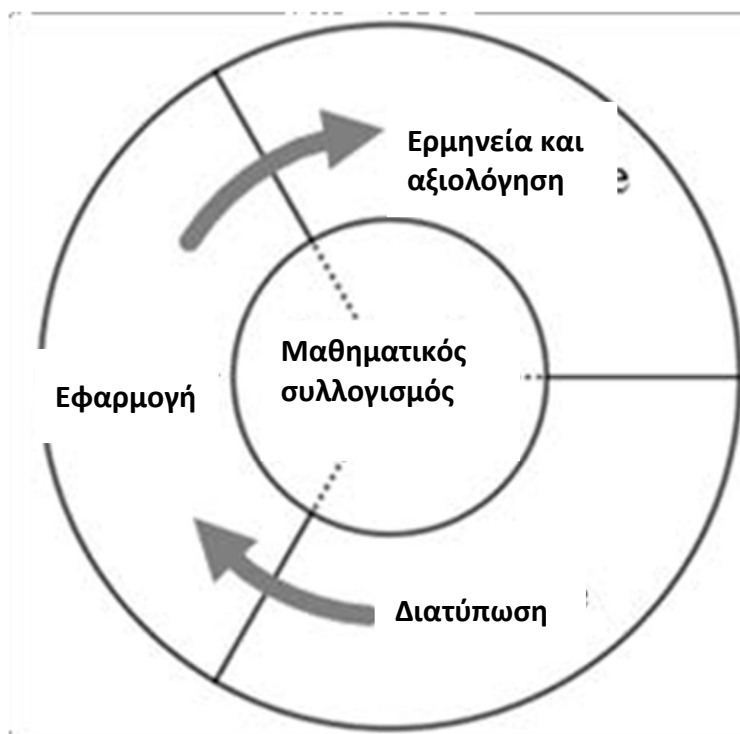
Μια άποψη των μαθηματικά εγγράμματων ατόμων στην PISA 2022

Η εστίαση της γλώσσας στον ορισμό του μαθηματικού εγγραμματισμού είναι στην ενεργό ενασχόληση με τα μαθηματικά για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου σε διάφορα πλαίσια και προορίζεται να περιλαμβάνει μαθηματικό συλλογισμό (παραγωγικό και επαγωγικό) και επίλυση προβλημάτων με τη χρήση μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών, γεγονότων και εργαλείων για την περιγραφή, εξήγηση και πρόβλεψη φαινομένων.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ο ορισμός του μαθηματικού εγγραμματισμού δεν επικεντρώνεται μόνο στη χρήση των μαθηματικών για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου, αλλά προσδιορίζει επίσης τον μαθηματικό συλλογισμό ως βασική πτυχή του μαθηματικού εγγραμματισμού. Η συμβολή του πλαισίου του PISA 2022 είναι να αναδείξει την κεντρική θέση του μαθηματικού συλλογισμού τόσο στον κύκλο μοντελοποίησης - επίλυσης προβλημάτων όσο και στον μαθηματικό εγγραμματισμό γενικότερα.

Το Σχήμα 1 απεικονίζει τη σχέση μεταξύ μαθηματικού συλλογισμού (παραγωγικού και επαγωγικού) και επίλυσης προβλημάτων, όπως αποτυπώνεται στον κύκλο μαθηματικής μοντελοποίησης τόσο του πλαισίου PISA 2003 όσο και του PISA 2012.

Σχήμα 2.1. Μαθηματικός εγγραμματισμός: η σχέση μεταξύ μαθηματικού συλλογισμού και του κύκλου επίλυσης προβλημάτων (κύκλος μοντελοποίησης)



Προκειμένου οι μαθητές να είναι μαθηματικά εγγράμματοι, πρέπει να είναι σε θέση, πρωτίστως να χρησιμοποιούν τη γνώση του μαθηματικού περιεχομένου για να αναγνωρίζουν τη μαθηματική φύση μιας κατάστασης (προβλήματος), ιδίως των καταστάσεων που συναντώνται στον πραγματικό κόσμο, και στη συνέχεια να τη διατυπώνουν με μαθηματικούς όρους. Αυτός ο μετασχηματισμός - από μια ασαφή και μη πλήρως δομημένη κατάσταση του πραγματικού κόσμου σε ένα καλά καθορισμένο μαθηματικό πρόβλημα - απαιτεί μαθηματικό συλλογισμό. Αφού γίνει επιτυχώς ο μετασχηματισμός, το μαθηματικό πρόβλημα που προκύπτει πρέπει να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τις μαθηματικές έννοιες, τους αλγόριθμους και τις διαδικασίες που διδάσκονται στο σχολείο. Ωστόσο, μπορεί να απαιτήσει τη λήψη στρατηγικών αποφάσεων σχετικά με την επιλογή αυτών των εργαλείων και τη σειρά εφαρμογής τους - αυτό αποτελεί επίσης εκδήλωση του μαθηματικού

συλλογισμού. Τέλος, ο ορισμός του PISA μας υπενθυμίζει την ανάγκη ο μαθητής να αξιολογήσει τη μαθηματική λύση ερμηνεύοντας τα αποτελέσματα στο πλαίσιο της αρχικής πραγματικής κατάστασης. Επιπλέον, οι μαθητές θα πρέπει επίσης να διαθέτουν και να είναι σε θέση να επιδεικνύουν δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης ως μέρος της πρακτικής τους στην επίλυση προβλημάτων. Αυτές οι δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης που εφαρμόζονται κατά τη διατύπωση, την εφαρμογή, την αξιολόγηση και τον συλλογισμό περιλαμβάνουν την αναγνώριση προτύπων, την αποσύνθεση, τον προσδιορισμό των υπολογιστικών εργαλείων (εάν υπάρχουν) που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση ή την επίλυση του προβλήματος και τον καθορισμό αλγορίθμων ως μέρος μιας ολοκληρωμένης λύσης.

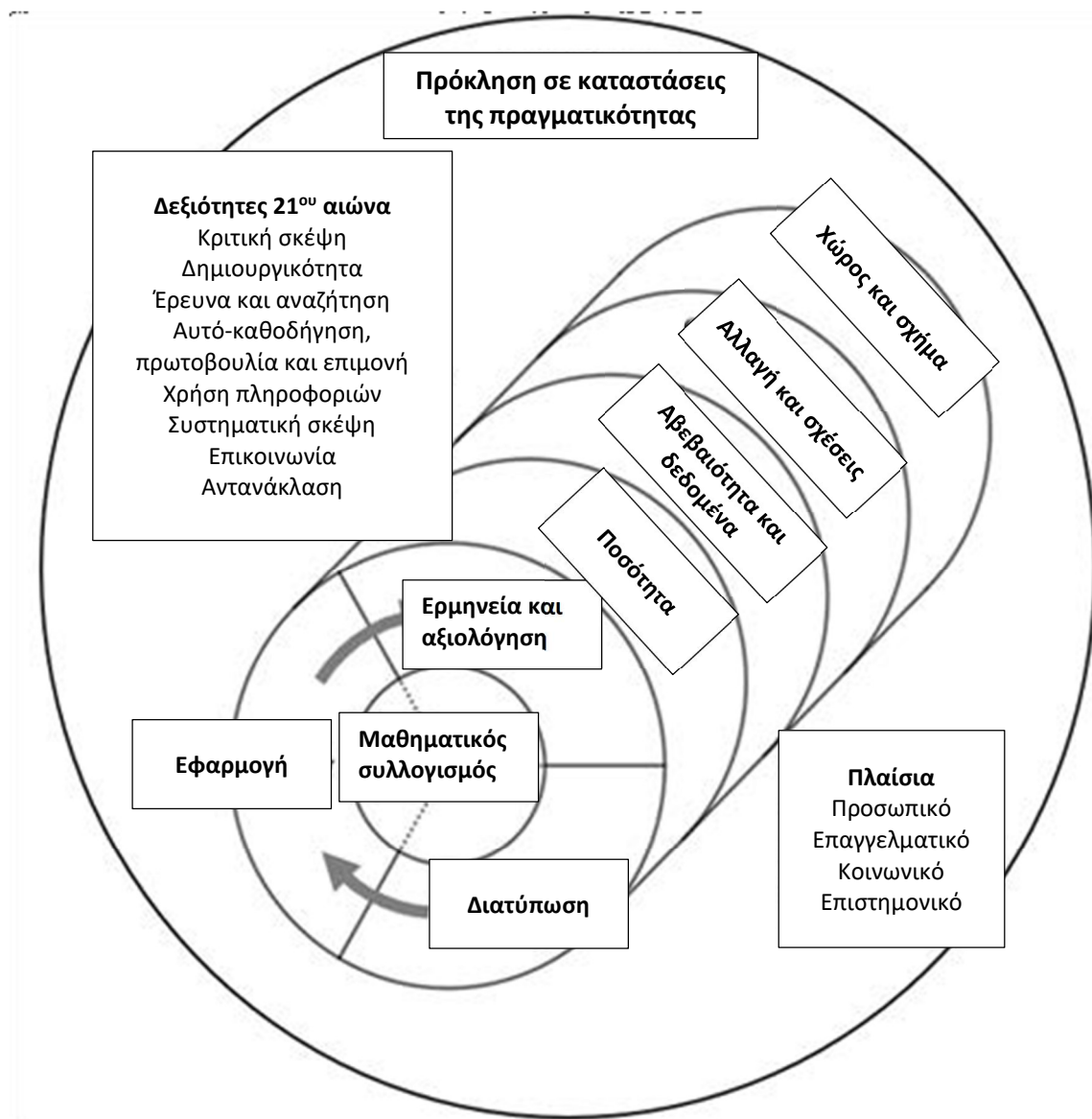
Αν και ο μαθηματικός συλλογισμός και η επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου επικαλύπτονται, υπάρχει μια πτυχή της μαθηματικής λογικής που υπερβαίνει την επίλυση πρακτικών προβλημάτων. Ο μαθηματικός συλλογισμός είναι επίσης ένας τρόπος αξιολόγησης και διατύπωσης επιχειρημάτων, αξιολόγησης ερμηνειών και συμπερασμάτων που σχετίζονται με ισχυρισμούς (π.χ. σε συζητήσεις για τη δημόσια πολιτική κ.λπ.) και με λύσεις προβλημάτων που, λόγω της ποσοτικής τους φύσης, γίνονται καλύτερα κατανοητές μέσω Μαθηματικών

Συνεπώς, ο μαθηματικός εγγραμματισμός περιλαμβάνει δύο συναφείς πτυχές: τον μαθηματικό συλλογισμό και την επίλυση προβλημάτων. Ο μαθηματικός εγγραμματισμός παίζει σημαντικό ρόλο στην ικανότητα χρήσης των μαθηματικών για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου. Επιπλέον, ο μαθηματικός συλλογισμός (παραγωγικός και επαγωγικός) υπερβαίνει την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και περιλαμβάνει τη διατύπωση τεκμηριωμένων κρίσεων σχετικά με τη σημαντική οικογένεια κοινωνικών ζητημάτων που μπορούν να αντιμετωπιστούν με μαθηματικά. Περιλαμβάνει επίσης τη λήψη αποφάσεων σχετικά με την εγκυρότητα των πληροφοριών στις οποίες εκτίθενται τα άτομα μέσω της εξέτασης των ποσοτικών και λογικών, συνεπειών τους. Εδώ

είναι που ο μαθηματικός συλλογισμός συμβάλλει επίσης στην ανάπτυξη ενός επιλεγμένου συνόλου δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα (που εξετάζονται σε άλλο σημείο του πλαισίου).

Ο εξωτερικός κύκλος του Σχήματος 2 δείχνει ότι ο μαθηματικός εγγραμματισμός λαμβάνει χώρα στο πλαίσιο μιας πρόκλησης ή ενός προβλήματος που προκύπτει στον πραγματικό κόσμο.

Σχήμα 2 PISA 2022: Η σχέση μεταξύ του μαθηματικού συλλογισμού, του κύκλου επίλυσης προβλήματος (κύκλος μοντελοποίησης), του μαθηματικού περιεχομένου, του πλαισίου και επιλεγμένων δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα



Το Σχήμα 2 απεικονίζει επίσης τη σχέση μεταξύ του μαθηματικού εγγραμματισμού όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1 και: των τομέων μαθηματικού περιεχομένου στους οποίους εφαρμόζεται ο μαθηματικός εγγραμματισμός, των πλαισίων προβλημάτων και των επιλεγμένων δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα που υποστηρίζουν και αναπτύσσονται μέσω του μαθηματικού εγγραμματισμού.

Αυτές οι κατηγορίες μαθηματικού περιεχομένου περιλαμβάνουν: ποσότητα, αβεβαιότητα και δεδομένα, αλλαγή και σχέσεις, χώρος και σχήμα. Είναι αυτές οι κατηγορίες γνώσεων μαθηματικού περιεχομένου στις οποίες οι μαθητές πρέπει να βασιστούν για να συλλογίζονται μαθηματικά, να διατυπώσουν το πρόβλημα (μετατρέποντας την κατάσταση του πραγματικού κόσμου σε μια κατάσταση μαθηματικού προβλήματος), να επιλύουν το μαθηματικό πρόβλημα που έχει ήδη διατυπωθεί και να ερμηνεύει και να αξιολογεί τη λύση που έχει βρεθεί.

Όπως και στους προηγούμενους κύκλους, τα τέσσερα πλαίσια που συνεχίζει να χρησιμοποιεί το PISA για να προσδιορίσει τις καταστάσεις του πραγματικού κόσμου είναι το προσωπικό, το επαγγελματικό, το κοινωνικό και το επιστημονικό. Το πλαίσιο μπορεί να είναι προσωπικής φύσης, περιλαμβάνοντας προβλήματα ή προκλήσεις που μπορεί να αντιμετωπίσει ένα άτομο ή η οικογένεια ή η ομάδα συνομηλίκων του. Αντίθετα, το πρόβλημα μπορεί να εντάσσεται σε ένα κοινωνικό πλαίσιο (με επίκεντρο την τοπική, εθνική ή παγκόσμια κοινότητα), σε ένα επαγγελματικό πλαίσιο (με επίκεντρο τον κόσμο της εργασίας) ή σε ένα επιστημονικό πλαίσιο (που αφορά την εφαρμογή των μαθηματικών στον φυσικό και τεχνολογικό κόσμο).

Για πρώτη φορά στο πλαίσιο PISA 2022 περιλαμβάνονται (και απεικονίζονται στο Σχήμα 2) επιλεγμένες δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα, στις οποίες βασίζεται και τις οποίες αναπτύσσει ο μαθηματικός εγγραμματισμός. Οι δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα εξετάζονται λεπτομερέστερα στην επόμενη ενότητα του παρόντος πλαισίου. Προς το παρόν, θα πρέπει να τονιστεί ότι ενώ τα πλαίσια (προσωπικά, κοινωνικά, επαγγελματικά και επιστημονικά) επηρεάζουν την ανάπτυξη των θεμάτων αξιολόγησης, δεν αναμένεται ότι τα αντικείμενα θα αναπτυχθούν σκόπιμα για να ενσωματώσουν ή να αντιμετωπίσουν τις δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα. Αντίθετα, η προσδοκία είναι ότι ανταποκρινόμενοι στο πνεύμα του πλαισίου και σύμφωνα με τον ορισμό του μαθηματικού εγγραμματισμού, οι δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα που έχουν εντοπιστεί θα ενσωματωθούν στα αντικείμενα.

Η γλώσσα του ορισμού και η αναπαράσταση στο Σχήμα 1 και στο Σχήμα 2

διατηρούν και ενσωματώνουν την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης, η οποία αποτελεί ιστορικά ακρογωνιαίο λίθο του πλαισίου του PISA για τα μαθηματικά, π.χ. (OECD, 2004[6], OECD, 2013[7]). Ο κύκλος μοντελοποίησης (διατύπωση, εφαρμογή, ερμηνεία και αξιολόγηση) αποτελεί κεντρική πτυχή της αντίληψης του PISA για τους μαθηματικά εγγράμματους μαθητές-ωστόσο, συχνά δεν είναι απαραίτητο να εμπλακούν σε κάθε στάδιο του κύκλου μοντελοποίησης, ιδίως πλαίσιο μιας αξιολόγησης (Galbraith, Henn και Niss, 2007[22]). Συχνά, σημαντικά τμήματα του κύκλου μαθηματικής μοντελοποίησης έχουν αναληφθεί από άλλους και ο τελικός χρήστης εκτελεί ορισμένα από τα στάδια του κύκλου μοντελοποίησης, αλλά όχι όλα. Για παράδειγμα, σε ορισμένες περιπτώσεις, δίνονται μαθηματικές αναπαραστάσεις, όπως γραφήματα ή εξισώσεις, οι οποίες μπορούν να χειριστούν άμεσα προκειμένου να απαντηθεί κάποιο ερώτημα ή να εξαχθεί κάποιο συμπέρασμα. Σε άλλες περιπτώσεις, οι μαθητές μπορεί να χρησιμοποιούν μια προσομοίωση στον υπολογιστή για να διερευνήσουν την επίδραση μεταβολών μεταβλητών σε ένα σύστημα ή περιβάλλον. Για το λόγο αυτό, πολλά στοιχεία του PISA περιλαμβάνουν μόνο τμήματα του κύκλου μοντελοποίησης. Στην πραγματικότητα, ο λύτης του προβλήματος μπορεί επίσης μερικές φορές να ταλαντεύεται μεταξύ των διαδικασιών, επιστρέφοντας για να επανεξετάσει προηγούμενες αποφάσεις και υποθέσεις. Καθεμία από τις διαδικασίες μπορεί να παρουσιάζει σημαντικές προκλήσεις και μπορεί να απαιτηθούν αρκετές επαναλήψεις σε ολόκληρο τον κύκλο.

Ειδικότερα, τα ρήματα "διατυπώνω", "εφαρμόζω" και "ερμηνεύω" υποδεικνύουν τις τρεις διαδικασίες στις οποίες θα εμπλακούν οι μαθητές ως ενεργοί λύτες προβλημάτων. Η μαθηματική διατύπωση καταστάσεων περιλαμβάνει την εφαρμογή μαθηματικού συλλογισμού (παραγωγικού και επαγωγικού) για τον εντοπισμό ευκαιριών εφαρμογής και χρήσης των μαθηματικών - βλέποντας ότι τα μαθηματικά μπορούν να εφαρμοστούν για την κατανόηση ή την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος ή μιας πρόκλησης που παρουσιάζεται. Περιλαμβάνει την ικανότητα να λαμβάνεται μια κατάσταση όπως παρουσιάζεται και να μετατρέπεται σε μια μορφή που επιδέχεται μαθηματική επεξεργασία, παρέχοντας μαθηματική δομή και

αναπαραστάσεις, προσδιορίζοντας μεταβλητές και κάνοντας απλουστευτικές υποθέσεις για να βοηθηθεί η επίλυση του προβλήματος ή η αντιμετώπιση της πρόκλησης. Η εφαρμογή των μαθηματικών περιλαμβάνει την εφαρμογή μαθηματικού συλλογισμού με τη χρήση μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών, γεγονότων και εργαλείων για την εξαγωγή μαθηματικής λύσης. Περιλαμβάνει την εκτέλεση υπολογισμών, τον χειρισμό αλγεβρικών παραστάσεων και εξισώσεων ή άλλων μαθηματικών μοντέλων, την ανάλυση πληροφοριών με μαθηματικό τρόπο από μαθηματικά διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις, την ανάπτυξη μαθηματικών περιγραφών και εξηγήσεων και τη χρήση μαθηματικών εργαλείων για την επίλυση προβλημάτων. Η ερμηνεία των μαθηματικών περιλαμβάνει τον αναστοχασμό σχετικά με μαθηματικές λύσεις ή αποτελέσματα και την ερμηνεία τους στο πλαίσιο ενός προβλήματος ή μιας πρόκλησης. Περιλαμβάνει την εφαρμογή μαθηματικών συλλογισμών για την αξιολόγηση μαθηματικών λύσεων σε σχέση με το πλαίσιο του προβλήματος και τον προσδιορισμό του κατά πόσον τα αποτελέσματα είναι εύλογα και συνεπή στην κατάσταση- τον προσδιορισμό επίσης του τι πρέπει να τονιστεί κατά την εξήγηση της λύσης.

Στο πλαίσιο PISA 2022 περιλαμβάνεται για πρώτη φορά η εκτίμηση της διασταύρωσης μεταξύ μαθηματικής και υπολογιστικής σκέψης, η οποία δημιουργεί ένα παρόμοιο σύνολο προοπτικών, διαδικασιών σκέψης και νοητικών μοντέλων που χρειάζονται οι μαθητές για να επιτύχουν σε έναν ολοένα και πιο τεχνολογικό κόσμο. Ένα σύνολο συστατικών πρακτικών που τοποθετούνται κάτω από την ομπρέλα της υπολογιστικής σκέψης (δηλαδή η αφαίρεση, η αλγοριθμική σκέψη, η αυτοματοποίηση, η αποσύνθεση και η γενίκευση) είναι επίσης κεντρικές τόσο στη μαθηματική σκέψη όσο και στις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. Η φύση της υπολογιστικής σκέψης στο πλαίσιο των μαθηματικών εννοιολογείται ως ο καθορισμός και η επεξεργασία μαθηματικών γνώσεων που μπορούν να εκφραστούν με προγραμματισμό, επιτρέποντας στους μαθητές να μοντελοποιούν δυναμικά μαθηματικές έννοιες και σχέσεις. Μια ταξινόμια πρακτικών υπολογιστικής σκέψης που προσανατολίζεται ειδικά προς τη μάθηση των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών περιλαμβάνει πρακτικές δεδομένων, πρακτικές μοντελοποίησης και προσομοίωσης, πρακτικές επίλυσης υπολογιστικών

προβλημάτων και πρακτικές συστημικής σκέψης (Weintrop et al., 2016[17]). Ο συνδυασμός της μαθηματικής και της υπολογιστικής σκέψης καθίσταται απαραίτητος όχι μόνο για την αποτελεσματική υποστήριξη της ανάπτυξης της εννοιολογικής κατανόησης του μαθηματικού τομέα από τους μαθητές, αλλά και για την ανάπτυξη των εννοιών και των δεξιοτήτων υπολογιστικής σκέψης, δίνοντας στους μαθητές μια πιο ρεαλιστική εικόνα του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά εφαρμόζονται στην επαγγελματική πρακτική και χρησιμοποιούνται στον πραγματικό κόσμο και, με τη σειρά τους, τους προετοιμάζει καλύτερα για την άσκηση επαγγελματικής σταδιοδρομίας σε συναφείς τομείς (Basu et al., 2016[23], Benton et al., 2017[24], Pei, Weintrop and Wilensky, 2018[16], Beheshti et al., 2017[25]).

Ρητή σύνδεση με ποικίλα πλαίσια για τα προβλήματα στο PISA 2022

Η αναφορά στον ορισμό του μαθηματικού εγγραμματισμού σε "ποικίλα πλαίσια του πραγματικού κόσμου" αναγνωρίζει ότι ο πολίτης του 21^{ου} αιώνα είναι αποδέκτης ποσοτικών, και συχνά στατιστικών, επιχειρημάτων. Η αναφορά αποσκοπεί στη σύνδεση με τα συγκεκριμένα πλαίσια που περιγράφονται και δίνονται παραδείγματα εκτενέστερα στη συνέχεια του παρόντος πλαισίου. Τα ίδια τα συγκεκριμένα πλαίσια δεν είναι τόσο σημαντικά, αλλά οι τέσσερις κατηγορίες που επιλέχθηκαν για χρήση εδώ (προσωπικό, επαγγελματικό, κοινωνικό και επιστημονικό) αντικατοπτρίζουν ένα ευρύ φάσμα καταστάσεων στις οποίες τα άτομα μπορεί να συναντήσουν ευκαιρίες εφαρμογής των Μαθηματικών. Ο ορισμός αναγνωρίζει επίσης ότι ο μαθηματικός εγγραμματισμός βοηθά τα άτομα να αναγνωρίζουν το ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στον κόσμο και να διατυπώνουν τεκμηριωμένες κρίσεις και να λαμβάνουν αποφάσεις που απαιτούνται από δημιουργικούς, ενεργούς και σκεπτόμενους πολίτες που έρχονται αντιμέτωποι με μηνύματα και επιχειρήματα της μορφής: "μια μελέτη διαπίστωσε ότι κατά μέσο όρο...", "μια έρευνα δείχνει μεγάλη πτώση του...", "«ορισμένοι επιστήμονες ισχυρίζονται ότι η αύξηση του πληθυσμού θα ξεπεράσει την παραγωγή τροφίμων σε x χρόνια...» κ.λπ.

Ορατός ρόλος των μαθηματικών εργαλείων, συμπεριλαμβανομένης της τεχνολογίας, στο PISA 2022

Ο ορισμός του μαθηματικού εγγραμματος περιλαμβάνει ρητά τη χρήση μαθηματικών εργαλείων. Τα εργαλεία αυτά περιλαμβάνουν μια ποικιλία φυσικών και ψηφιακών μέσων, λογισμικού και υπολογιστικών συσκευών. Τα μαθηματικά εργαλεία που βασίζονται σε υπολογιστές είναι σε κοινή χρήση στους χώρους εργασίας του 21^{ου} αιώνα και θα είναι όλο και πιο διαδεδομένα καθώς ο αιώνας προχωράει τόσο στο χώρο εργασίας όσο και στην κοινωνία γενικότερα. Η φύση των καθημερινών και εργασιακών προβλημάτων και οι απαιτήσεις από τα άτομα να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν μαθηματικό συλλογισμό (παραγωγικό και επαγωγικό) σε καταστάσεις όπου υπάρχουν υπολογιστικά εργαλεία έχει διευρυνθεί με αυτές τις νέες ευκαιρίες - δημιουργώντας αυξημένες προσδοκίες για τον μαθηματικό εγγραμματισμό.

Από τον κύκλο του 2015, η αξιολόγηση μέσω υπολογιστή (CBA) είναι ο κύριος τρόπος εξέτασης, αν και υπάρχει ένα ισοδύναμο έντυπο εργαλείο για τις χώρες που επέλεξαν να μην εξετάσουν τους μαθητές τους μέσω υπολογιστή. Οι αξιολογήσεις μαθηματικού εγγραμματος του 2015 και του 2018 δεν αξιοποίησαν τις ευκαιρίες που προσφέρει ο υπολογιστής.

Η Αξιολόγηση των Μαθηματικών μέσω Υπολογιστή (CBAM) θα είναι ο βασικός τρόπος αξιολόγησης του μαθηματικού εγγραμματος από το 2022. Παρόλο που η επιλογή της αξιολόγησης σε χαρτί θα παραμείνει για τις χώρες που θέλουν να συνεχίσουν με αυτόν τον τρόπο, η CBAM θα εκμεταλλευτεί τις δυνατότητες της CBAM. Οι ευκαιρίες που δημιουργεί αυτή η μετάβαση συζητούνται λεπτομερέστερα στη συνέχεια του πλαισίου.

Οργάνωση του τομέα

Το πλαίσιο για τα Μαθηματικά του PISA ορίζει το πεδίο των μαθηματικών για την έρευνα PISA και περιγράφει μια προσέγγιση για την αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματισμού των 15χρονων. Δηλαδή, το PISA αξιολογεί το βαθμό στον οποίο οι 15χρονοι μαθητές μπορούν να συλλογίζονται μαθηματικά και να χειρίζονται τα Μαθηματικά με επιδεξιότητα όταν έρχονται αντιμέτωποι με καταστάσεις και προβλήματα - η πλειονότητα των οποίων παρουσιάζεται σε πλαίσια του πραγματικού κόσμου.

Για τους σκοπούς της αξιολόγησης, ο ορισμός του μαθηματικού εγγραμματισμού του PISA 2022 μπορεί να αναλυθεί σε τρεις αλληλένδετες διαστάσεις (βλ. Σχήμα 2):

- τον μαθηματικό συλλογισμό (παραγωγικό και επαγωγικό) και την επίλυση προβλήματος (η οποία περιλαμβάνει τις μαθηματικές διαδικασίες που περιγράφουν τι κάνουν τα άτομα για να συνδέσουν το πλαίσιο του προβλήματος με τα Μαθηματικά και έτσι να λύσουν το πρόβλημα),
- το μαθηματικό περιεχόμενο που απαιτείται για την απάντηση στις ερωτήσεις αξιολόγησης,
- τα πλαίσια στα οποία διατυπώνονται οι ερωτήσεις αξιολόγησης σε συνδυασμό με επιλεγμένες δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα που υποστηρίζουν και αναπτύσσονται μέσω του μαθηματικού εγγραμματισμού.

Οι ακόλουθες ενότητες αναλύουν αυτές τις διαστάσεις για να υποστηρίξουν την κατανόηση και να παράσχουν καθοδήγηση στους σχεδιαστές των θεμάτων αξιολόγησης. Με την επισήμανση αυτών των διαστάσεων του πεδίου, το πλαίσιο αξιολόγησης των Μαθηματικών του PISA 2022 συμβάλλει στη διασφάλιση ότι τα θέματα αξιολόγησης που αναπτύσσονται για την έρευνα αντανakλούν ένα ευρύ φάσμα μαθηματικού συλλογισμού και επίλυσης προβλημάτων, μαθηματικού περιεχομένου, πλαισίων και δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα, έτσι ώστε ως στο σύνολό να αποτυπώνουν με εγκυρότητα αυτό που το πλαίσιο ορίζει ως μαθηματικό εγγραμματισμό.

Πολλές ερωτήσεις, με βάση τον ορισμό του μαθηματικού εγγραμματισμού του PISA 2022, βρίσκονται πίσω από την οργάνωση αυτού του τμήματος του πλαισίου. Αυτές είναι:

- Τι κάνουν τα άτομα όταν συλλογίζονται μαθηματικά και επιλύουν μαθηματικά προβλήματα ενταγμένα σε πλαίσιο;
- Ποια κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου μπορούμε να αναμένουμε από τα άτομα - και ειδικότερα από τους 15χρονους μαθητές;
- Σε ποια πλαίσια μπορεί να παρατηρηθεί και να αξιολογηθεί ο μαθηματικός εγγραμματισμός και πώς αυτά αλληλεπιδρούν με τις αναγνωρισμένες δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα;

Μαθηματικός συλλογισμός και διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων

Μαθηματικός συλλογισμός

Ο μαθηματικός συλλογισμός (παραγωγικός και επαγωγικός) περιλαμβάνει την αξιολόγηση καταστάσεων, την επιλογή στρατηγικών, την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων, την ανάπτυξη και περιγραφή λύσεων και την αναγνώριση του τρόπου με τον οποίο οι λύσεις αυτές μπορούν να εφαρμοστούν. Οι μαθητές συλλογίζονται μαθηματικά όταν:

- Προσδιορίζουν, αναγνωρίζουν, οργανώνουν, συνδέουν και αναπαριστούν,
- Κατασκευάζουν, αφαιρούν, αξιολογούν, συμπεραίνουν, αιτιολογούν, εξηγούν και υποστηρίζουν και
- Ερμηνεύουν, αξιολογούν, διατυπώνουν κρίσεις, απορρίπτουν και διατυπώνουν επιφυλάξεις.

Η ικανότητα λογικού συλλογισμού και παρουσίασης επιχειρημάτων με ειλικρινή και πειστικό τρόπο είναι μια δεξιότητα που γίνεται όλο και πιο σημαντική στον σημερινό κόσμο. Τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που αφορά σαφώς καθορισμένα αντικείμενα και έννοιες, τα οποία μπορούν να αναλυθούν και να μετασχηματιστούν με διάφορους τρόπους χρησιμοποιώντας "μαθηματικό συλλογισμό" για να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για τα οποία είμαστε σίγουροι. Μέσω των μαθηματικών, οι μαθητές μαθαίνουν ότι χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο συλλογισμό μπορούν να καταλήξουν σε αποτελέσματα και συμπεράσματα τα οποία μπορούν να εμπιστευτούν ότι είναι αληθινά. Περαιτέρω, τα συμπεράσματα αυτά είναι λογικά και αντικειμενικά, και ως εκ τούτου αμερόληπτα, χωρίς καμία ανάγκη επικύρωσης από μια εξωτερική αυθεντία. Αυτό το είδος συλλογισμού, το οποίο είναι χρήσιμο πολύ πέρα από το πεδίο των μαθηματικών, μπορεί να διδαχθεί και να καλλιεργηθεί πιο αποτελεσματικά μέσα τη μαθηματική εκπαίδευση.

Δύο πτυχές του μαθηματικού συλλογισμού είναι ιδιαίτερα σημαντικές στον σύγχρονο κόσμο και στον καθορισμό των θεμάτων του PISA. Η μία είναι η

εξαγωγή συμπερασμάτων από σαφείς υποθέσεις (παραγωγικός συλλογισμός), που αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα της μαθηματικής διαδικασίας. Η χρησιμότητα αυτής της ικανότητας έχει ήδη τονιστεί. Η δεύτερη σημαντική διάσταση αφορά τον στατιστικό και πιθανολογικό (επαγωγική) συλλογισμό. Σε λογικό επίπεδο, υπάρχει στις μέρες μας συχνή σύγχυση στο μυαλό των ατόμων μεταξύ του δυνατού και του πιθανού, με αποτέλεσμα πολλοί να πέφτουν θύματα θεωριών συνωμοσίας ή ψευδών ειδήσεων. Από τεχνική άποψη, ο σημερινός κόσμος είναι όλο και πιο πολύπλοκος και οι πολλαπλές διαστάσεις του αντιπροσωπεύονται από τεράστιους όγκους δεδομένων. Η κατανόηση αυτών των δεδομένων είναι μία από τις μεγαλύτερες προκλήσεις που θα αντιμετωπίσει η ανθρωπότητα στο μέλλον. Οι μαθητές μας θα πρέπει να εξοικειωθούν με τη φύση αυτών των δεδομένων και τη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων στο πλαίσιο της μεταβλητότητας και της αβεβαιότητας.

Ο μαθηματικός συλλογισμός (παραγωγικός και επαγωγικός), ο οποίος ενεργοποιείται από ορισμένες βασικές αντιλήψεις που διέπουν τα σχολικά μαθηματικά, αποτελεί τον πυρήνα του μαθηματικού εγγραμματισμού.

Μεταξύ αυτών των βασικών αντιλήψεων περιλαμβάνονται:

- Η κατανόηση της ποσότητας, των αριθμητικών συστημάτων και των αλγεβρικών ιδιοτήτων τους,
- Η αναγνώριση της σημασίας της αφαίρεσης και της συμβολικής αναπαράστασης
- Η αναγνώριση μαθηματικών δομών και των κανονικοτήτων τους,
- Η αναγνώριση συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων,
- Η χρήση μαθηματικής μοντελοποίησης ως φακού για την κατανόηση του πραγματικού κόσμου (π.χ. αυτά που προκύπτουν στις φυσικές, βιολογικές, κοινωνικές, οικονομικές και συμπεριφορικές επιστήμες)
- Η κατανόηση της μεταβλητότητας ως την καρδιά της στατιστικής.

Η περιγραφή καθενός από αυτά που ακολουθεί παρέχει μια επισκόπηση της κατανόησης και του τρόπου με τον οποίο υποστηρίζουν τον μαθηματικό συλλογισμό. Ενώ οι περιγραφές μπορεί να φαίνονται αφηρημένες, η πρόθεση δεν είναι να αντιμετωπιστούν με αφηρημένο τρόπο στην

αξιολόγηση PISA. Το μήνυμα που πρέπει να μεταφέρουν οι περιγραφές είναι πώς αυτές οι ιδέες εμφανίζονται στα σχολικά μαθηματικά και πώς, ενισχύοντας την εμφάνισή τους στη διδασκαλία, υποστηρίζουμε τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν πώς μπορούν να εφαρμοστούν σε νέα και διαφορετικά πλαίσια.

Κατανόηση της ποσότητας, των αριθμητικών συστημάτων και των αλγεβρικών τους ιδιοτήτων

Η βασική έννοια της ποσότητας αποτελεί ίσως την πιο διαδεδομένη και ουσιαστική μαθηματική διάσταση της αλληλεπίδρασης του ανθρώπου με τον κόσμο και της λειτουργίας του μέσα σε αυτόν (OECD, 2017, σ. 18[26]). Στο πιο βασικό επίπεδο ασχολείται με τη χρήσιμη ικανότητα σύγκρισης του πλήθους συνόλων αντικειμένων. Η ικανότητα της μέτρησης αφορά συνήθως σε σχετικά μικρά σύνολα - στις περισσότερες γλώσσες, μόνο ένα μικρό υποσύνολο αριθμών έχει ονόματα. Όταν αξιολογούμε μεγαλύτερα σύνολα, εμπλεκόμαστε σε πιο σύνθετες διαδικασίες όπως η εκτίμηση, η στρογγυλοποίηση και η εφαρμογή τάξεων μεγέθους. Η καταμέτρηση συνδέεται πολύ στενά με μια άλλη θεμελιώδη λειτουργία, την ταξινόμηση των πραγμάτων, όπου αναδύεται η διατακτική διάσταση των αριθμών. Η ποσοτικοποίηση των χαρακτηριστικών των αντικειμένων (μέτρηση), σχέσεων, καταστάσεων και οντοτήτων στον κόσμο είναι ένας από τους βασικότερους τρόπους εννοιολόγησης του περιβάλλοντος κόσμου (OECD, 2017[26]).

Η κατανόηση της ποσότητας, των αριθμητικών συστημάτων και των αλγεβρικών ιδιοτήτων τους περιλαμβάνει τη βασική έννοια του αριθμού, τα διαδοχικά επεκτεινόμενα σύνολα αριθμών (π.χ. φυσικοί αριθμοί, ακέραιοι αριθμοί, ρητοί αριθμοί, πραγματικοί αριθμοί), την αριθμητική των αριθμών και τις αλγεβρικές ιδιότητες των συστημάτων. Ειδικότερα, είναι χρήσιμο να κατανοήσουμε πώς τα προοδευτικά πιο εκτεταμένα αριθμητικά συστήματα επιτρέπουν την επίλυση ολοένα και πιο περίπλοκων εξισώσεων. Αυτό θέτει τα θεμέλια για να μπορέσουν οι μαθητές να δουν όλο και περισσότερες εκφάνσεις των μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο καθώς μαθαίνουν περισσότερα μαθηματικά.

Για την αποτελεσματική χρήση της ποσοτικοποίησης, πρέπει κανείς να είναι

σε θέση να εφαρμόζει όχι μόνο τους αριθμούς, αλλά και των αριθμητικών συστημάτων στο σύνολό τους. Οι ίδιοι οι αριθμοί έχουν περιορισμένη σημασία- αυτό που τους καθιστά ισχυρό εργαλείο είναι οι πράξεις που μπορούμε να εκτελέσουμε με αυτούς. Ως εκ τούτου, η καλή κατανόηση των πράξεων μεταξύ των αριθμών αποτελεί το θεμέλιο του μαθηματικού συλλογισμού.

Είναι επίσης σημαντικό να κατανοήσουμε τις διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων (ως αριθμητικά σύμβολα, ως σημεία σε μια αριθμογραμμή, ως γεωμετρικά μεγέθη και με ειδικά σύμβολα όπως το π) και πώς να μετακινούμαστε μεταξύ αυτών- των τρόπων με τους οποίους αυτές οι αναπαραστάσεις επηρεάζονται από τα συστήματα αριθμών· των τρόπων με τους οποίους οι αλγεβρικές ιδιότητες αυτών των συστημάτων είναι σχετικές και έχουν σημασία για τη λειτουργία μέσα στα συστήματα· και τη σημασία των ιδιοτήτων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, της προσεταιριστικής, της αντιμεταθετικής και της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού σε σχέση με την πρόσθεση. Οι αλγεβρικές αρχές στηρίζουν το σύστημα αξιών θέσης, επιτρέποντας την οικονομική έκφραση των αριθμών και τις αποτελεσματικές προσεγγίσεις των πράξεων σε αυτούς. Είναι επίσης κεντρικές για τις πράξεις με αριθμούς που βασίζονται στην αριθμογραμμή, συμπεριλαμβανομένης της χρήσης των αντίθετων αριθμών, οι οποίοι είναι κεντρικής σημασίας για την πρόσθεση και την αφαίρεση αρχικά των ακεραίων, στη συνέχεια των ρητών και τέλος των πραγματικών αριθμών.

Ο κεντρικός ρόλος του αριθμού ως βασικής έννοιας σε όλους τους άλλους μαθηματικούς τομείς που εξετάζονται εδώ και στον ίδιο τον μαθηματικό συλλογισμό, είναι αναμφισβήτητος. Η κατανόηση από τους μαθητές των αλγεβρικών αρχών και ιδιοτήτων που αρχικά αναπτύσσονται μέσα από την ενασχόληση με τους αριθμούς είναι θεμελιώδης για την κατανόηση των εννοιών της άλγεβρας της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και για την ανάπτυξη της ευχέρειας στο χειρισμό αλγεβρικών εκφράσεων, που είναι απαραίτητη για την επίλυση εξισώσεων, τη δημιουργία μαθηματικών μοντέλων, τη γραφική παράσταση συναρτήσεων και τον προγραμματισμό και

τη δημιουργία τύπων σε υπολογιστικά φύλλα. . Στο σύγχρονο κόσμο, όπου η επεξεργασία δεδομένων διαδραματίζει ολοένα και σημαντικότερο ρόλο, η ικανότητα αναγνώρισης και ερμηνείας αριθμητικών μοτίβων, η σύγκριση των μοτίβων και άλλες αριθμητικές δεξιότητες αποκτούν ολοένα και μεγαλύτερη σημασία.

Η ευρεία κατανόηση της ποσότητας και των αριθμητικών συστημάτων υποστηρίζει τον μαθηματικό συλλογισμό στις εφαρμογές των μαθηματικών σε καταστάσεις του πραγματικού κόσμου, όπως προβλέπονται στο παρόν πλαίσιο.

Αναγνώριση της σημασίας της αφαίρεσης και της συμβολικής αναπαράστασης

Οι θεμελιώδεις ιδέες των μαθηματικών προέκυψαν από την ανθρώπινη εμπειρία στον κόσμο και την ανάγκη να παρέχεται συνοχή, τάξη και προβλεψιμότητα σε αυτή την εμπειρία. Πολλά μαθηματικά αντικείμενα μοντελοποιούν την πραγματικότητα ή τουλάχιστον αντανακλούν πτυχές της πραγματικότητας με κάποιο τρόπο. Ωστόσο, η ουσία της αφαίρεσης στα μαθηματικά είναι ότι αποτελούν ένα αυτοτελές σύστημα και τα μαθηματικά αντικείμενα αντλούν το νόημά τους μέσα από αυτό το σύστημα. Η αφαίρεση περιλαμβάνει τη σκόπιμη και επιλεκτική εστίαση σε δομικές ομοιότητες μεταξύ μαθηματικών αντικειμένων και την κατασκευή σχέσεων μεταξύ αυτών των αντικειμένων με βάση αυτές τις ομοιότητες. Στα σχολικά μαθηματικά, η αφαίρεση διαμορφώνει σχέσεις μεταξύ συγκεκριμένων αντικειμένων, συμβολικών αναπαραστάσεων και πράξεων, συμπεριλαμβανομένων των αλγορίθμων και των νοητικών μοντέλων. Η ικανότητα αυτή παίζει επίσης ρόλο στην εργασία με υπολογιστικές συσκευές. Η ικανότητα δημιουργίας, χειρισμού και άντλησης νοήματος κατά την εργασία με αφηρημένες έννοιες σε τεχνολογικά πλαίσια αποτελεί σημαντική δεξιότητα υπολογιστικής σκέψης.

Για παράδειγμα, τα παιδιά αρχίζουν να αναπτύσσουν την έννοια του "κύκλου" βιώνοντας συγκεκριμένα αντικείμενα που τα οδηγούν σε μια άτυπη κατανόηση του κύκλου ως "στρογγυλού" σχήματος. Μπορεί να σχεδιάσουν κύκλους για να αναπαραστήσουν αυτά τα αντικείμενα, παρατηρώντας

ομοιότητες μεταξύ των σχεδίων για να γενικεύσουν σχετικά με την έννοια του "στρογγυλού", παρόλο που οι κύκλοι έχουν διαφορετικά μεγέθη. Ο "κύκλος" γίνεται ένα αφηρημένο μαθηματικό αντικείμενο όταν οι μαθητές αρχίζουν να "χρησιμοποιούν" κύκλους ως αντικείμενα στην εργασία τους και πιο επίσημα όταν ορίζεται ως ο γεωμετρικός τύπος των σημείων που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο σε ένα δισδιάστατο επίπεδο.

Οι μαθητές χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις - είτε με βάση το κείμενο, είτε συμβολικές, γραφικές, αριθμητικές, γεωμετρικές ή μέσω κώδικα προγραμματισμού - για να οργανώσουν και να επικοινωνήσουν τη μαθηματική τους σκέψη. Οι αναπαραστάσεις μάς επιτρέπουν να παρουσιάσουμε τις μαθηματικές ιδέες με συνοπτικό τρόπο, οι οποίες, με τη σειρά τους, οδηγούν σε αποτελεσματικούς αλγορίθμους. Οι αναπαραστάσεις αποτελούν επίσης βασικό στοιχείο της μαθηματικής μοντελοποίησης, επιτρέποντας στους μαθητές να διαμορφώνουν μια αφηρημένη, απλουστευμένη ή εξιδανικευμένη αναπαράσταση ενός προβλήματος του πραγματικού κόσμου. Τέτοιες δομές είναι επίσης σημαντικές για την ερμηνεία και τον καθορισμό της συμπεριφοράς των υπολογιστικών συσκευών.

Η κατανόηση της αφαίρεσης και της συμβολικής αναπαράστασης υποστηρίζει τον μαθηματικό συλλογισμό στις εφαρμογές των μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο που προβλέπονται από το παρόν πλαίσιο, επιτρέποντας στους μαθητές να μετακινούνται από τις συγκεκριμένες λεπτομέρειες μιας κατάστασης στα γενικότερα χαρακτηριστικά και να τα περιγράφουν με αποτελεσματικό τρόπο.

Αναγνώριση μαθηματικών δομών και των κανονικοτήτων τους

Όταν οι μαθητές του δημοτικού βλέπουν: $5+(3+8)$ κάποιοι βλέπουν μια σειρά συμβόλων που υποδηλώνουν έναν υπολογισμό που πρέπει να εκτελεστεί με μια συγκεκριμένη σειρά σύμφωνα με τους κανόνες προτεραιότητας των πράξεων. Άλλοι βλέπουν έναν αριθμό που προστίθεται στο άθροισμα δύο άλλων αριθμών. Η δεύτερη ομάδα μαθητών βλέπει τη δομή της παράστασης και εξαιτίας αυτού δεν χρειάζεται να τους πούμε για την προτεραιότητα των

πράξεων, διότι αν θέλετε να προσθέσετε έναν αριθμό σε ένα άθροισμα πρέπει πρώτα να υπολογίσετε το άθροισμα.

Η αναγνώριση της δομής συνεχίζει να είναι σημαντική καθώς οι μαθητές προχωρούν σε μεγαλύτερες τάξεις. Ένας μαθητής που αντιλαμβάνεται ότι η συνάρτηση $f(x) = 5 + (x - 3)^2$ εκφράζει το άθροισμα του 5 και ενός τετραγώνου που μηδενίζεται όταν $x = 3$ καταλαβαίνει ότι το ελάχιστο της f είναι το 5. Αυτό θέτει τα θεμέλια για τη συναρτησιακή σκέψη που συζητείται στην επόμενη ενότητα.

Η δομή συνδέεται στενά με τη συμβολική αναπαράσταση. Η χρήση των συμβόλων είναι ισχυρή, αλλά μόνο αν διατηρούν νόημα για το άτομο που τα χρησιμοποιεί, αντί να μετατρέπονται σε ανούσια αντικείμενα που αναδιατάσσονται σε μια σελίδα. Η αναγνώριση της δομής είναι ένας τρόπος για να βρούμε και να θυμηθούμε το νόημα μιας αφηρημένης αναπαράστασης. Τέτοιες δομές είναι επίσης σημαντικές για την ερμηνεία και τον καθορισμό της συμπεριφοράς των υπολογιστικών συσκευών. Η ικανότητα αναγνώρισης της δομής είναι ένα σημαντικό εννοιολογικό θεμέλιο για τη διαδικαστική γνώση.

Τα παραπάνω παραδείγματα καταδεικνύουν πώς η αναγνώριση της δομής στα αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα είναι ένας τρόπος αντικατάστασης των κανόνων ανάλυσης, οι οποίοι μπορούν να εκτελεστούν από έναν υπολογιστή, με εννοιολογικές αναπαραστάσεις αυτών των αντικειμένων που καθιστούν σαφείς τις ιδιότητές τους. Ένα μαθηματικό αντικείμενο που διατηρείται στο μυαλό με αυτόν τον τρόπο υπόκειται σε μαθηματικό συλλογισμό σε επίπεδο υψηλότερο από τον απλό συμβολικό χειρισμό.

Μια ισχυρή αίσθηση της μαθηματικής δομής υποστηρίζει επίσης τη μαθηματική μοντελοποίηση. Όταν τα υπό μελέτη αντικείμενα δεν είναι αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα, αλλά μάλλον αντικείμενα από τον πραγματικό κόσμο που πρέπει να μοντελοποιηθούν με τα μαθηματικά, τότε η μαθηματική δομή μπορεί να καθοδηγήσει τη διαδικασία της μοντελοποίησης. Οι μαθητές μπορούν επίσης να επιβάλουν δομή σε μη

μαθηματικά αντικείμενα προκειμένου να τα καταστήσουν αντικείμενο μαθηματικής ανάλυσης. Ένα ακανόνιστο σχήμα μπορεί να προσεγγιστεί από απλούστερα σχήματα των οποίων το εμβαδόν είναι γνωστό. Ένα γεωμετρικό μοτίβο μπορεί να γίνει κατανοητό μέσω μετασχηματισμών, όπως μεταφορά, περιστροφή ή συμμετρία και να επεκταθεί αφηρημένα σε όλο το χώρο. Η στατιστική ανάλυση είναι συχνά θέμα επιβολής μιας δομής σε ένα σύνολο δεδομένων, για παράδειγμα υποθέτοντας ότι προέρχονται από μια κανονική κατανομή ή υποθέτοντας ότι μια μεταβλητή είναι γραμμική συνάρτηση μιας άλλης με τυχαίο σφάλμα

Η ικανότητα αντίληψης μαθηματικών δομών υποστηρίζει τον μαθηματικό συλλογισμό στις εφαρμογές των μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο που προβλέπει αυτό το πλαίσιο, επιτρέποντας στους μαθητές να μεταφέρουν τη γνώση για καταστάσεις ή προβλήματα σε ένα πλαίσιο σε προβλήματα σε ένα άλλο πλαίσιο που έχουν παρόμοια δομή.

Αναγνώριση συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων

Οι μαθητές στο δημοτικό σχολείο αντιμετωπίζουν προβλήματα όπου πρέπει να βρουν συγκεκριμένες ποσότητες. Για παράδειγμα, με τι ταχύτητα πρέπει να οδηγήσει κάποιος για να φτάσει από το Tucson στο Phoenix, μια απόσταση 180 χιλιομέτρων, σε 1 ώρα και 40 λεπτά; Τέτοια προβλήματα έχουν μια συγκεκριμένη απάντηση: για να διανύσει 180 χιλιόμετρα σε 1 ώρα και 40 λεπτά πρέπει να οδηγήσει με ταχύτητα 108 χιλιόμετρα την ώρα.

Κάποια στιγμή οι μαθητές αρχίζουν να εξετάζουν καταστάσεις όπου οι ποσότητες είναι μεταβλητές, δηλαδή όπου μπορούν να πάρουν ένα εύρος τιμών. Για παράδειγμα, ποια είναι η σχέση μεταξύ της διανυόμενης απόστασης, d , σε χιλιόμετρα, και του χρόνου οδήγησης, t , σε ώρες, αν οδηγείτε με σταθερή ταχύτητα 108 χλμ. την ώρα; Τέτοιες ερωτήσεις εισάγουν την έννοια των συναρτησιακών σχέσεων. Στην περίπτωση αυτή η σχέση, που εκφράζεται από την εξίσωση $d = 108t$, είναι μια σχέση αναλογίας, το θεμελιώδες παράδειγμα και ίσως το πιο σημαντικό για τη γενική γνώση.

Οι σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων μπορούν να εκφραστούν με εξισώσεις,

γραφήματα, πίνακες ή λεκτικές περιγραφές. Ένα σημαντικό βήμα στην μαθηματική μάθηση είναι να εξάγουμε από αυτές την έννοια της ίδιας της συνάρτησης, ως αφηρημένο αντικείμενο του οποίου αυτές οι μορφές αποτελούν αναπαραστάσεις. Τα βασικά στοιχεία της έννοιας της συνάρτησης είναι το πεδίο ορισμού, από το οποίο επιλέγονται οι είσοδοι, το σύνολο τιμών, στο οποίο βρίσκονται οι έξοδοι, και τον κανόνα που αντιστοιχίζει κάθε είσοδο σε μία έξοδο.

Η αναγνώριση των συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών στις εφαρμογές των μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο που προβλέπονται από αυτό το πλαίσιο υποστηρίζει τον μαθηματικό συλλογισμό, επιτρέποντας στους μαθητές να επικεντρωθούν στον τρόπο με τον οποίο η αλληλεξάρτηση και η αλληλεπίδραση μεταξύ των μεταβλητών επηρεάζει την κατάσταση.

Χρήση της μαθηματικής μοντελοποίησης ως φακού για την κατανόηση του πραγματικού κόσμου

Τα μοντέλα αντιπροσωπεύουν μια εννοιολόγηση των φαινομένων. Τα μοντέλα είναι απλοποιήσεις της πραγματικότητας που ορισμένα χαρακτηριστικά ενός φαινομένου, ενώ προσεγγίζουν ή αγνοούν άλλα χαρακτηριστικά. Ως εκ τούτου, "όλα τα μοντέλα είναι λανθασμένα, αλλά μερικά είναι χρήσιμα" (Box and Draper, 1987, σ. 424[27]). Η χρησιμότητα ενός μοντέλου προκύπτει από την ερμηνευτική ή/και προβλεπτική του δύναμη (Weintrop et al., 2016[17]). Τα μοντέλα είναι, υπό αυτή την, αφαιρέσεις της πραγματικότητας. Ένα μοντέλο μπορεί να παρουσιάζει μια εννοιολογική αναπαράσταση που νοείται ως προσέγγιση ή υπόθεση εργασίας σχετικά με το υπό μελέτη φαινόμενο ή μπορεί να αποτελεί σκόπιμη απλοποίηση. Τα μαθηματικά μοντέλα διατυπώνονται σε μαθηματική γλώσσα και χρησιμοποιούν ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών εργαλείων και αποτελεσμάτων (π.χ. από την αριθμητική, την άλγεβρα, τη γεωμετρία κ.λπ.). Ως τέτοια, χρησιμοποιούνται ως τρόποι ακριβούς προσδιορισμού μιας εννοιολογικής αναπαράστασης ή της θεωρίας ενός φαινομένου, για την ανάλυση και την αξιολόγηση δεδομένων (ταιριάζει το μοντέλο με τα δεδομένα;) και για τη διατύπωση προβλέψεων. Τα μοντέλα μπορούν να λειτουργήσουν - δηλαδή να λειτουργήσουν δυναμικά με την πάροδο του χρόνου ή με μεταβαλλόμενες εισόδους, παράγοντας έτσι μια προσομοίωση. Όταν γίνει αυτό, είναι δυνατόν να γίνουν προβλέψεις, να μελετηθούν οι

συνέπειες και να αξιολογηθεί η επάρκεια και η ακρίβεια των μοντέλων. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας μοντελοποίησης πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι παράμετροι του πραγματικού κόσμου που επηρεάζουν το μοντέλο και τις λύσεις που προκύπτουν με τη χρήση του μοντέλου.

Τα υπολογιστικά μοντέλα παρέχουν τη δυνατότητα ελέγχου υποθέσεων, παραγωγής δεδομένων, εισαγωγής τυχαιότητας κ.ο.κ. Ο μαθηματικός εγγραμματισμός περιλαμβάνει την ικανότητα κατανόησης, αξιολόγησης και ερμηνείας υπολογιστικών μοντέλων.

Η χρήση μοντέλων γενικά και μαθηματικών μοντέλων ειδικότερα υποστηρίζει τη συλλογιστική σχετικά με τις εφαρμογές των μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο που προβλέπονται σε αυτό το πλαίσιο, ενθαρρύνοντας τους μαθητές να επικεντρωθούν στα πιο σημαντικά στοιχεία των καταστάσεων και με αυτόν τον τρόπο να ανάγουν το πρόβλημα στον πυρήνα του.

Η κατανόηση της μεταβλητότητας ως την καρδιά της στατιστικής

Στη στατιστική η συνεκτίμηση της μεταβλητότητας είναι ένα, αν όχι το κεντρικό, καθοριστικό στοιχείο γύρω από το οποίο βασίζεται ο κλάδος. Στον σημερινό κόσμο οι άνθρωποι συχνά αντιμετωπίζουν τέτοιου είδους καταστάσεις απλώς αγνοώντας τη διακύμανση και, ως αποτέλεσμα, προτείνοντας σαρωτικές γενικεύσεις, οι οποίες είναι συχνά παραπλανητικές, αν όχι λανθασμένες, και, ως αποτέλεσμα, πολύ επικίνδυνες. Η μεροληψία με την έννοια της κοινωνικής επιστήμης δημιουργείται συνήθως από τη μη συνεκτίμηση των πηγών και των μεγεθών της μεταβλητότητας του υπό συζήτηση χαρακτηριστικού.

Η στατιστική αφορά ουσιαστικά τη συνεκτίμηση ή τη μοντελοποίηση της διακύμανσης, όπως αυτή μετράται από τη διακύμανση ή, στην περίπτωση πολλαπλών μεταβλητών, από τον πίνακα συνδιακύμανσης. Αυτό παρέχει ένα πιθανοτικό πλαίσιο στο οποίο μπορούμε να κατανοήσουμε διάφορα φαινόμενα καθώς και να λάβουμε κρίσιμες αποφάσεις. Η στατιστική είναι κατά πολλούς τρόπους μια αναζήτηση προτύπων σε ένα εξαιρετικά μεταβλητό πλαίσιο: προσπάθεια να βρεθεί η μοναδική καθοριστική

"αλήθεια" εν μέσω ενός μεγάλου όγκου τυχαίου θορύβου. Η "αλήθεια" τίθεται σε εισαγωγικά, καθώς δεν είναι η φύση της αλήθειας που μπορούν να αποδώσουν τα μαθηματικά, αλλά μια εκτίμηση της αλήθειας που τίθεται σε ένα πιθανοτικό πλαίσιο, συνοδευόμενη από μια εκτίμηση του σφάλματος που περιέχεται στη διαδικασία. Τελικά, ο λήπτης αποφάσεων μένει με το δίλημμα να μην γνωρίζει ποτέ με βεβαιότητα ποια είναι η αλήθεια. Η εκτίμηση που έχει αναπτυχθεί είναι, στην καλύτερη περίπτωση, ένα εύρος πιθανών τιμών - όσο πιο αξιόπιστη είναι η διαδικασία, για παράδειγμα, όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος τόσο μικρότερο είναι το εύρος των πιθανών τιμών, αν και ένα εύρος δεν μπορεί να εξαλειφθεί πλήρως. Ορισμένες πτυχές αυτού του θέματος υπήρχαν και σε προηγούμενους κύκλους του PISA, ωστόσο η αυξανόμενη σημασία της συμβάλλει στην αυξημένη έμφαση που της αποδίδεται στο παρόν το πλαίσιο.

Η κατανόηση της διακύμανσης ως κεντρικού χαρακτηριστικού της στατιστικής υποστηρίζει τον μαθηματικό συλλογισμό σχετικά με τις πραγματικές εφαρμογές των μαθηματικών που προβλέπονται σε αυτό το πλαίσιο, καθώς οι μαθητές ενθαρρύνονται να ασχοληθούν με επιχειρήματα που βασίζονται σε δεδομένα, έχοντας επίγνωση των περιορισμών των συμπερασμάτων που μπορούν να εξαχθούν.

Επίλυση προβλημάτων

Ο ορισμός του μαθηματικού εγγραμματισμού αναφέρεται στην ικανότητα ενός ατόμου να διατυπώνει, να εφαρμόζει και να ερμηνεύει (και να αξιολογεί) τα μαθηματικά. Αυτές οι τρεις μαθηματικές διεργασίες, διατύπωση, εφαρμογή και ερμηνεία, παρέχουν μια χρήσιμη και ουσιαστική δομή για την οργάνωση των μαθηματικών διαδικασιών που περιγράφουν τι κάνουν τα άτομα για να συνδέσουν το πλαίσιο ενός προβλήματος με τα μαθηματικά και να λύσουν το πρόβλημα. Τα θέματα στην εξέταση μαθηματικών του PISA 2022 θα αντιστοιχούν είτε στον μαθηματικό συλλογισμό είτε σε μία από τις τρεις μαθηματικές διαδικασίες:

- διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά,
- εφαρμογή και χρήση μαθηματικών εννοιών, γεγονότων, διαδικασιών

- ερμηνεία, εφαρμογή και αξιολόγηση των μαθηματικών αποτελεσμάτων.

Είναι σημαντικό τόσο για τους υπεύθυνους χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής όσο και για όσους εμπλέκονται άμεσα με την καθημερινή εκπαίδευση των μαθητών να γνωρίζουν πόσο αποτελεσματικά οι μαθητές είναι σε θέση να συμμετέχουν σε κάθε μία από αυτές τις πτυχές του μοντέλου/κύκλου επίλυσης προβλημάτων. Η διατύπωση δείχνει πόσο αποτελεσματικά οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίζουν και να εντοπίζουν ευκαιρίες χρήσης των μαθηματικών σε καταστάσεις προβλήματος και στη συνέχεια να παρέχουν την απαραίτητη μαθηματική δομή που απαιτείται για τη διατύπωση του εν λόγω προβλήματος σε μαθηματική μορφή. Η εφαρμογή αναφέρεται στο πόσο καλά οι μαθητές είναι σε θέση να εκτελούν υπολογισμούς και μαθηματικούς χειρισμούς και να εφαρμόζουν τις μαθηματικές έννοιες και τα γεγονότα που γνωρίζουν για να καταλήξουν σε μια μαθηματική λύση ενός προβλήματος που διατυπώθηκε μαθηματικά. Η ερμηνεία (και η αξιολόγηση) αφορά το πόσο αποτελεσματικά οι μαθητές είναι σε θέση να προβληματιστούν σχετικά με τις μαθηματικές λύσεις ή τα συμπεράσματα, να τα ερμηνεύσουν πλαίσιο του πραγματικού προβλήματος και να καθορίσουν αν το αποτέλεσμα ή τα συμπεράσματα είναι λογικά ή/και χρήσιμα. Η ικανότητα των μαθητών να εφαρμόζουν τα μαθηματικά σε προβλήματα και καταστάσεις εξαρτάται από τις δεξιότητες που εμπεριέχονται και στα τρία αυτά στάδια και η κατανόηση της αποτελεσματικότητας των μαθητών σε κάθε κατηγορία μπορεί να βοηθήσει στην ενημέρωση τόσο των συζητήσεων σε επίπεδο εκπαιδευτικής πολιτικής όσο και των αποφάσεων που λαμβάνονται πιο κοντά στο επίπεδο της τάξης.

Επιπλέον, η ενθάρρυνση των μαθητών να εμπλέκονται σε διαδικασίες επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων μέσω εργαλείων και πρακτικών υπολογιστικής σκέψης ενθαρρύνει τους μαθητές να εξασκήσουν τις δεξιότητες πρόβλεψης, αναστοχασμού και αποσφαλμάτωσης (Brennan and Resnick, 2012[28]).

Διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά

Ο όρος "διατύπωση" στον ορισμό του μαθηματικού εγγραμματισμού αναφέρεται στο ότι τα άτομα είναι σε θέση να αναγνωρίζουν και να εντοπίζουν ευκαιρίες χρήσης των μαθηματικών και στη συνέχεια να παρέχουν μαθηματική δομή σε ένα πρόβλημα που παρουσιάζεται σε κάποιο πραγματικό πλαίσιο. Κατά τη διαδικασία της διατύπωσης καταστάσεων με μαθηματικό τρόπο, τα άτομα προσδιορίζουν ποια μαθηματικά στοιχεία μπορούν να αντλήσουν για την ανάλυση, τη δημιουργία και την επίλυση του προβλήματος. Μεταφράζουν μία κατάσταση από τον πραγματικό κόσμο στο πεδίο των μαθηματικών και προσδίδουν στο πρόβλημα του πραγματικού κόσμου μαθηματική δομή, αναπαραστάσεις και σαφήνεια. Συλλογίζονται και κατανοούν τους περιορισμούς και τις υποθέσεις του προβλήματος. Συγκεκριμένα, η διαδικασία αυτή της διατύπωσης καταστάσεων με μαθηματικό τρόπο περιλαμβάνει δραστηριότητες όπως οι ακόλουθες:

- την επιλογή του κατάλληλου μοντέλου από έναν κατάλογο.
- την αναγνώριση των μαθηματικών πτυχών ενός προβλήματος που εντάσσεται σε ένα πραγματικό πλαίσιο και τον προσδιορισμό των σημαντικών μεταβλητών,
- την αναγνώριση της μαθηματικής δομής (συμπεριλαμβανομένων των κανονικοτήτων, των σχέσεων και των μοτίβων) σε προβλήματα ή καταστάσεις,
- την απλοποίηση μιας κατάστασης ή ενός προβλήματος προκειμένου να καταστεί κατάλληλο για μαθηματική ανάλυση (για παράδειγμα με αποσύνθεση),
- τον προσδιορισμό των περιορισμών και των υποθέσεων που κρύβονται πίσω από κάθε μαθηματική μοντελοποίηση και απλοποίηση που προκύπτει από το πλαίσιο,
- την αναπαράσταση μιας κατάστασης με μαθηματικό τρόπο, χρησιμοποιώντας κατάλληλες μεταβλητές, σύμβολα, διαγράμματα και τυποποιημένα μοντέλα,
- την αναπαράσταση ενός προβλήματος με διαφορετικό τρόπο, συμπεριλαμβανομένης της οργάνωσής του σύμφωνα με τις μαθηματικές έννοιες και την πραγματοποίηση κατάλληλων υποθέσεων,

- την κατανόηση και εξήγηση των σχέσεων μεταξύ της γλώσσας του πραγματικού πλαισίου ενός προβλήματος και της συμβολικής και τυπικής γλώσσας που απαιτείται για τη μαθηματική αναπαράστασή του,
- τη μετάφραση ενός προβλήματος σε μαθηματική γλώσσα ή αναπαράσταση,
- την αναγνώριση πτυχών ενός προβλήματος που αντιστοιχούν σε γνωστά προβλήματα ή μαθηματικές έννοιες, γεγονότα ή διαδικασίες,
- την επιλογή μεταξύ μιας σειράς και τη χρήση του πιο αποτελεσματικού υπολογιστικού εργαλείου για την αναπαράσταση μιας μαθηματικής σχέσης που εμπεριέχεται σε ένα πρόβλημα με βάση το πλαίσιο,
- τη δημιουργία μιας οργανωμένης ακολουθίας βημάτων (βήμα προς βήμα) για την επίλυση προβλημάτων.

Εφαρμογή και χρήση μαθηματικών εννοιών, γεγονότων και διαδικασιών

Η λέξη "εφαρμόζω" στον ορισμό του μαθηματικού εγγραμματισμού αναφέρεται στο ότι τα άτομα είναι σε θέση να εφαρμόζουν μαθηματικές έννοιες, γεγονότα, διαδικασίες και συλλογισμούς για την επίλυση μαθηματικά διατυπωμένων προβλημάτων με σκοπό την εξαγωγή μαθηματικών συμπερασμάτων. Κατά τη διαδικασία χρήσης μαθηματικών εννοιών, γεγονότων και διαδικασιών για την επίλυση προβλημάτων, τα άτομα εκτελούν τις μαθηματικές διαδικασίες που απαιτούνται για την εξαγωγή αποτελεσμάτων και την εξεύρεση μαθηματικής λύσης (π.χ. εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών, επίλυση εξισώσεων, λογικά συμπεράσματα από μαθηματικές υποθέσεις, συμβολικοί χειρισμοί, εξαγωγή μαθηματικών πληροφοριών από πίνακες και γραφήματα, αναπαράσταση και χειρισμός σχημάτων στο χώρο και ανάλυση δεδομένων). Εργάζονται πάνω σε ένα μοντέλο της προβληματικής κατάστασης, διαπιστώνουν κανονικότητες, εντοπίζουν συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών οντοτήτων και διατυπώνουν μαθηματικά επιχειρήματα. Συγκεκριμένα, η διαδικασία αυτή της εφαρμογής μαθηματικών εννοιών, γεγονότων και διαδικασιών περιλαμβάνει δραστηριότητες όπως:

- εκτέλεση ενός απλού υπολογισμού**

- εξαγωγή ενός απλού συμπεράσματος**
- επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής από έναν κατάλογο**
- επινόηση και εφαρμογή στρατηγικών για την εξεύρεση μαθηματικών λύσεων,
- χρήση μαθηματικών εργαλείων, συμπεριλαμβανομένης της τεχνολογίας, για την εξεύρεση ακριβών ή προσεγγιστικών λύσεων,
- εφαρμογή μαθηματικών γεγονότων, κανόνων, αλγορίθμων και δομών κατά την επίλυση προβλημάτων,
- χειρισμό αριθμών, γραφικών και στατιστικών δεδομένων και πληροφοριών, αλγεβρικών εκφράσεων και εξισώσεων και γεωμετρικών αναπαραστάσεων,
- κατασκευή μαθηματικών διαγραμμάτων γραφημάτων, προσομοιώσεων, κατασκευών και εξαγωγή μαθηματικών πληροφοριών από αυτά,
- χρήση και εναλλαγή μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων κατά τη διαδικασία επίλυσης,
- διατύπωση γενικεύσεων και υποθέσεων με βάση τα αποτελέσματα της εφαρμογής μαθηματικών διαδικασιών,
- αναστοχασμό μαθηματικών επιχειρημάτων, ερμηνεία και αιτιολόγηση μαθηματικών αποτελεσμάτων,
- αξιολόγηση της σημασίας των παρατηρούμενων (ή προτεινόμενων) προτύπων και κανονικοτήτων στα δεδομένα.

Ερμηνεία, εφαρμογή και αξιολόγηση των μαθηματικών αποτελεσμάτων

Η λέξη ερμηνεία (και αξιολόγηση) που χρησιμοποιείται στον ορισμό του μαθηματικού εγγραμματισμού επικεντρώνεται στην ικανότητα των ατόμων να αναστοχάζονται πάνω σε μαθηματικές λύσεις, αποτελέσματα ή συμπεράσματα και να τα ερμηνεύουν στο πλαίσιο του πραγματικού προβλήματος πραγματικής ζωής από το οποίο προέκυψαν. Αυτό περιλαμβάνει τη μετάφραση μαθηματικών λύσεων ή συλλογισμών πίσω στο πλαίσιο του προβλήματος και τον προσδιορισμό του κατά πόσον τα αποτελέσματα είναι λογικά και έχουν νόημα στο πλαίσιο του προβλήματος. Η ερμηνεία, εφαρμογή και αξιολόγηση των μαθηματικών αποτελεσμάτων

περιλαμβάνει τόσο τα στοιχεία "ερμηνεία" όσο και "αξιολόγηση" του κύκλου της μαθηματικής μοντελοποίησης. Τα άτομα που εμπλέκονται σε αυτή τη διαδικασία μπορεί να κληθούν να διατυπώσουν και να επικοινωνήσουν εξηγήσεις και επιχειρήματα στο πλαίσιο του προβλήματος, αντανακλώντας τόσο τη διαδικασία μοντελοποίησης όσο και τα αποτελέσματά της. Συγκεκριμένα, αυτή η διαδικασία ερμηνείας, εφαρμογής και αξιολόγησης των μαθηματικών αποτελεσμάτων περιλαμβάνει δραστηριότητες όπως:

- ερμηνεία πληροφοριών που παρουσιάζονται σε γραφική μορφή και/ή σε διαγράμματα- **5
- αξιολόγηση ενός μαθηματικού αποτελέσματος σε σχέση με το πλαίσιο- **
- ερμηνεία ενός μαθηματικού αποτελέσματος στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου,
- αξιολόγηση του λογικού χαρακτήρα μιας μαθηματικής λύσης στο πλαίσιο ενός πραγματικού προβλήματος,
- την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ο πραγματικός κόσμος επηρεάζει τα αποτελέσματα και τους υπολογισμούς μιας μαθηματικής διαδικασίας ή ενός μοντέλου, προκειμένου να γίνουν κρίσεις σχετικά με το πλαίσιο για το πώς πρέπει να προσαρμοστούν ή να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα,
- εξήγηση του λόγου για τον οποίο ένα μαθηματικό αποτέλεσμα ή συμπέρασμα έχει ή δεν έχει νόημα στο πλαίσιο ενός προβλήματος,
- κατανόηση της εμβέλειας και των ορίων των μαθηματικών εννοιών και των μαθηματικών λύσεων,
- κριτική και εντοπισμός των περιορισμών του μοντέλου που χρησιμοποιείται για την επίλυση ενός προβλήματος,
- χρήση μαθηματικής σκέψης και υπολογιστικής σκέψης για τη διατύπωση προβλέψεων, την τεκμηρίωση επιχειρημάτων, και τον έλεγχο και σύγκριση προτεινόμενων λύσεων.

Μαθηματικό Περιεχόμενο

Η κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου - και η ικανότητα εφαρμογής της γνώσης αυτής για την επίλυση ουσιαστικών προβλημάτων σε ρεαλιστικά πλαίσια- είναι σημαντική για τους πολίτες στον σύγχρονο κόσμο. Δηλαδή, για να συλλογιστούμε μαθηματικά, να λύσουμε προβλήματα και να ερμηνεύσουμε καταστάσεις σε προσωπικό, επαγγελματικό, κοινωνικό και επιστημονικό πλαίσιο, υπάρχει ανάγκη να αξιοποιήσουμε ορισμένες μαθηματικές γνώσεις και κατανοήσεις.

Δεδομένου ότι ο στόχος του PISA είναι να αξιολογηθεί ο μαθηματικός εγγραμματισμός, προτείνεται μια οργανωτική δομή για τη γνώση μαθηματικού περιεχομένου που βασίζεται σε μαθηματικά φαινόμενα που διέπουν ευρείες κατηγορίες προβλημάτων. Μια τέτοια οργάνωση για το περιεχόμενο δεν είναι καινούργια, όπως φαίνεται από δύο σημαντικές δημοσιεύσεις: *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (Steen, 1990[29]) και *Mathematics: The Science of Patterns* (Devlin, 1994[30]).

Οι ακόλουθες κατηγορίες περιεχομένου (που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως το 2012) αξιοποιούνται εκ νέου στο PISA 2022 συμπεριλαμβάνουν τόσο τα μαθηματικά φαινόμενα που αποτελούν τη βάση των προβλημάτων, όσο και τη γενική δομή των μαθηματικών και τα περιεχόμενα των τυπικών σχολικών προγραμμάτων σπουδών. Αυτές οι τέσσερις κατηγορίες χαρακτηρίζουν το εύρος του μαθηματικού περιεχομένου που είναι κεντρικό για τον κλάδο και απεικονίζουν τις βασικές περιοχές περιεχομένου που χρησιμοποιούνται στις ερωτήσεις αξιολόγησης του PISA 2022 (το οποίο περιλαμβάνει αντικείμενα του PISA-D για την αύξηση των ευκαιριών στο χαμηλότερο άκρο του φάσματος επιδόσεων):

- αλλαγή και σχέσεις,
- χώρος και σχήμα,
- ποσότητα,
- αβεβαιότητα και δεδομένα.

Με αυτές τις τέσσερις κατηγορίες, το πεδίο των μαθηματικών μπορεί να οργανωθεί με τρόπο που να εξασφαλίζει την κατανομή των αντικειμένων σε

όλο το πεδίο και να εστιάζει σε σημαντικά μαθηματικά φαινόμενα, ενώ ταυτόχρονα αποφεύγεται η πολύ λεπτομερής ταξινόμηση που θα εμπόδιζε την ανάλυση πλούσιων και απαιτητικών μαθηματικών προβλημάτων που βασίζονται σε πραγματικές καταστάσεις.

Ενώ η κατηγοριοποίηση ανά κατηγορία περιεχομένου είναι σημαντική για την ανάπτυξη, την επιλογή και την αναφορά των αποτελεσμάτων της αξιολόγησης, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ορισμένα στοιχεία θα μπορούσαν ενδεχομένως να ταξινομηθούν σε περισσότερες από μία κατηγορίες περιεχομένου.

Τα εθνικά προγράμματα σπουδών μαθηματικών είναι συνήθως οργανωμένα γύρω από τομείς περιεχομένου (συνηθέστερα: αριθμοί, άλγεβρα, συναρτήσεις, γεωμετρία και ανάλυση δεδομένων) και οι λεπτομερείς κατάλογοι θεμάτων βοηθούν στον καθορισμό σαφών μαθησιακών προσδοκιών. Αυτά τα προγράμματα σπουδών έχουν σχεδιαστεί για να εφοδιάζουν τους μαθητές με γνώσεις και δεξιότητες που αφορούν τα ίδια βασικά μαθηματικά φαινόμενα που οργανώνουν το περιεχόμενο του PISA. Το αποτέλεσμα είναι ότι το εύρος του περιεχομένου που προκύπτει από την οργάνωσή του με τον τρόπο που το οργανώνει το PISA ευθυγραμμίζεται στενά με το περιεχόμενο που συνήθως συναντάται στα εθνικά προγράμματα σπουδών μαθηματικών. Αυτό το πλαίσιο απαριθμεί ένα εύρος θεμάτων περιεχομένου κατάλληλων για την αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματισμού των 15χρονων μαθητών, με βάση αναλύσεις εθνικών προτύπων από έντεκα χώρες.

Οι ευρείες κατηγορίες μαθηματικού περιεχομένου και τα πιο συγκεκριμένα θέματα περιεχομένου κατάλληλα για μαθητές 15 ετών που περιγράφονται στην παρούσα ενότητα αντικατοπτρίζουν το επίπεδο και το εύρος του περιεχομένου που είναι επιλέξιμο για να συμπεριληφθεί στην αξιολόγηση του PISA 2022. Παρατίθενται περιγραφές κάθε κατηγορίας περιεχομένου και η συνάφεια της κάθε κατηγορίας με τον μαθηματικό συλλογισμό και την επίλυση ουσιαστικών προβλημάτων, ενώ ακολουθούν πιο συγκεκριμένοι προσδιορισμοί των ειδών περιεχομένου που είναι κατάλληλα για να

συμπεριληφθούν σε μια αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματισμού των 15χρονων μαθητών και των εξωσχολικών νέων.

Τέσσερα θέματα έχουν προσδιοριστεί για να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην αξιολόγηση του PISA 2022. Τα θέματα αυτά δεν είναι νέα για τις κατηγορίες μαθηματικού περιεχομένου. Αντίθετα, πρόκειται για θέματα εντός των υφιστάμενων κατηγοριών περιεχομένου που χρήζουν ιδιαίτερης σημασίας. Στο έργο των Mahajan κ.ά. ("PISA Mathematics 2022", (2016[31])) τα τέσσερα θέματα παρουσιάζονται όχι μόνο ως κοινά απαντώμενες καταστάσεις στη ζωή των ενηλίκων γενικά, αλλά και ως τα είδη των μαθηματικών που απαιτούνται στους αναδυόμενους νέους τομείς της οικονομίας, όπως η προηγμένη τεχνολογική παραγωγή κ.λπ. Τα τέσσερα αυτά θέματα είναι: φαινόμενα ανάπτυξης, γεωμετρικές προσεγγίσεις, υπολογιστικές προσομοιώσεις και λήψη αποφάσεων υπό συνθήκη. Τα θέματα αυτά θα πρέπει να προσεγγίζονται στα θέματα αξιολόγησης τρόπο που συνάδει με τις εμπειρίες των 15χρονων. Κάθε θέμα συζητείται με τη συζήτηση της αντίστοιχης κατηγορίας περιεχομένου ως εξής:

- φαινόμενα ανάπτυξης (αλλαγή και σχέσεις),
- γεωμετρικές προσεγγίσεις (χώρος και σχήμα),
- προσομοιώσεις στον υπολογιστή (ποσότητα),
- λήψη αποφάσεων υπό συνθήκη (αβεβαιότητα και δεδομένα).

Αλλαγή και σχέσεις

Ο φυσικός και ο τεχνητός κόσμος εμφανίζουν ένα πλήθος προσωρινών και μόνιμων σχέσεων μεταξύ αντικειμένων και καταστάσεων, όπου οι αλλαγές συμβαίνουν μέσα σε συστήματα αλληλοσυνδεόμενων αντικειμένων ή σε συνθήκες όπου τα στοιχεία επηρεάζουν το ένα το άλλο. Σε πολλές περιπτώσεις οι αλλαγές αυτές συμβαίνουν με την πάροδο του χρόνου, και σε άλλες περιπτώσεις οι αλλαγές σε ένα αντικείμενο ή μέγεθος σχετίζονται με αλλαγές σε ένα άλλο. Ορισμένες από αυτές τις καταστάσεις συνεπάγονται διακριτές αλλαγές- άλλες μεταβάλλονται συνεχώς. Ορισμένες σχέσεις έχουν μόνιμο ή αναλλοίωτο χαρακτήρα. Το να είναι κανείς πιο εγγράμματος σχετικά με την αλλαγή και τις σχέσεις περιλαμβάνει την κατανόηση των

θεμελιωδών τύπων αλλαγής και την αναγνώριση του πότε συμβαίνουν, ώστε να χρησιμοποιεί κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή και την πρόβλεψη της αλλαγής. Από μαθηματική άποψη αυτό σημαίνει μοντελοποίηση της αλλαγής και των σχέσεων με κατάλληλες συναρτήσεις και εξισώσεις, καθώς και δημιουργία, ερμηνεία και μετάφραση μεταξύ συμβολικών και γραφικών αναπαραστάσεων των σχέσεων.

Η αλλαγή και οι σχέσεις είναι εμφανείς σε ποικίλα περιβάλλοντα, όπως η ανάπτυξη οργανισμών, η μουσική, οι εποχιακές αλλαγές και κύκλοι, οι καιρικές συνθήκες, τα επίπεδα απασχόλησης και οι οικονομικές συνθήκες. Οι πτυχές του παραδοσιακού μαθηματικού περιεχομένου των συναρτήσεων και της άλγεβρας, συμπεριλαμβανομένων των αλγεβρικών εκφράσεων, των εξισώσεων και ανισώσεων, των πινάκων και των γραφικών παραστάσεων, έχουν κεντρική σημασία για την περιγραφή, μοντελοποίηση και ερμηνεία των φαινομένων αλλαγής. Τα υπολογιστικά εργαλεία παρέχουν ένα μέσο για την οπτικοποίηση και την αλληλεπίδραση με την αλλαγή και τις σχέσεις. Η αναγνώριση του πώς και πότε μια υπολογιστική συσκευή μπορεί να ενισχύσει και να συμπληρώσει τις μαθηματικές έννοιες είναι μια σημαντική δεξιότητα υπολογιστικής σκέψης.

Οι αναπαραστάσεις των δεδομένων και των σχέσεων που περιγράφονται με τη χρήση στατιστικών μεθόδων χρησιμοποιούνται επίσης για την απεικόνιση και την ερμηνεία της αλλαγής και των σχέσεων, ενώ μια στέρεη γνώση των βασικών αρχών του αριθμού και των μονάδων είναι επίσης απαραίτητη για τον ορισμό και την ερμηνεία της αλλαγής και των σχέσεων. Ορισμένες ενδιαφέρουσες σχέσεις προκύπτουν από τη γεωμετρική μέτρηση, όπως ο τρόπος με τον οποίο οι αλλαγές στην περίμετρο μιας οικογένειας σχημάτων μπορεί να σχετίζονται με αλλαγές στο εμβαδόν ή οι σχέσεις μεταξύ των μηκών των πλευρών των τριγώνων.

Φαινόμενα ανάπτυξης: Η κατανόηση των κινδύνων των πανδημιών γρίπης και των βακτηριακών επιδημιών, καθώς η απειλή της κλιματικής αλλαγής, απαιτούν από τους ανθρώπους να μην σκέφτονται μόνο με όρους γραμμικών σχέσεων, αλλά να αναγνωρίζουν ότι τα φαινόμενα αυτά χρειάζονται μη

γραμμικά (συχνά εκθετικά αλλά και άλλα) μοντέλα. Οι γραμμικές σχέσεις είναι κοινές και είναι εύκολο να αναγνωριστούν και να κατανοηθούν, αλλά η παραδοχή της γραμμικότητας μπορεί να είναι επικίνδυνη. Ένα καλό παράδειγμα γραμμικότητας που πιθανώς χρησιμοποιείται από όλους είναι η εκτίμηση της απόστασης που διανύεται σε διάφορα χρονικά διαστήματα ενώ ταξιδεύουμε με δεδομένη ταχύτητα. Μια τέτοια εφαρμογή παρέχει μια λογική εκτίμηση εφόσον η ταχύτητα παραμένει σχετικά σταθερή. Αλλά με τις επιδημίες γρίπης, για παράδειγμα, μια τέτοια γραμμική προσέγγιση θα υποεκτιμούσε κατάφωρα τον αριθμό των ανθρώπων που νοσούν σε 5 ημέρες μετά το αρχικό ξέσπασμα. Εδώ είναι που η βασική κατανόηση της μη γραμμικής (συμπεριλαμβανομένης της τετραγωνικής και της εκθετικής) ανάπτυξης και του πόσο γρήγορα μπορούν να εξαπλωθούν οι λοιμώξεις δεδομένου ότι ο ρυθμός μεταβολής αυξάνεται από μέρα σε μέρα είναι κρίσιμη. Η εξάπλωση της λοίμωξης Ζίκα είναι ένα σημαντικό παράδειγμα εκθετικής ανάπτυξης- η αναγνώρισή της ως τέτοιας βοήθησε το ιατρικό προσωπικό να κατανοήσει την εγγενή απειλή και την ανάγκη για γρήγορη δράση.

Ο προσδιορισμός των φαινομένων ανάπτυξης ως κεντρικό σημείο της κατηγορίας περιεχομένου "Αλλαγές και σχέσεις" δεν σημαίνει ότι υπάρχει η προσδοκία ότι οι συμμετέχοντες μαθητές θα πρέπει να έχουν μελετήσει την εκθετική συνάρτηση και σίγουρα τα αντικείμενα δεν θα απαιτούν γνώση της εκθετικής συνάρτησης. Αντίθετα, η προσδοκία είναι ότι θα υπάρχουν ερωτήσεις αξιολόγησης που θα περιμένουν από τους μαθητές να (α) αναγνωρίσουν ότι δεν είναι κάθε αύξηση γραμμική, (β) ότι η μη γραμμική αύξηση έχει ιδιαίτερες και βαθιές επιπτώσεις στον τρόπο με τον οποίο κατανοούμε ορισμένες καταστάσεις, και (γ) να εκτιμήσουν τη διαισθητική έννοια της "εκθετικής αύξησης" ως εξαιρετικά ταχείας αύξησης όπου ο ρυθμός μεταβολής αυξάνεται συνεχώς, για παράδειγμα στην κλίμακα των σεισμών, κάθε αύξηση κατά 1 μονάδα στην κλίμακα Ρίχτερ δεν σημαίνει ανάλογη αύξηση του αποτελέσματός του, αλλά μάλλον κατά 10, 100 και 1000 φορές κ.λπ.

Χώρος και σχήμα

Το θέμα του χώρου και του σχήματος περιλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα φαινομένων που συναντάμε παντού στον οπτικό και φυσικό κόσμο: μοτίβα, ιδιότητες αντικειμένων, θέσεις και προσανατολισμοί, αναπαραστάσεις αντικειμένων, αποκωδικοποίηση και κωδικοποίηση οπτικών πληροφοριών, πλοήγηση και δυναμική αλληλεπίδραση με πραγματικά σχήματα καθώς και με αναπαραστάσεις, κίνηση, μετατόπιση και ικανότητα πρόβλεψης ενεργειών στο χώρο. Η γεωμετρία χρησιμεύει ως βασικό θεμέλιο για το χώρο και το σχήμα, αλλά η κατηγορία επεκτείνεται πέρα από την παραδοσιακή γεωμετρία ως προς το περιεχόμενο, το νόημα και τη μέθοδο, αντλώντας στοιχεία από άλλες μαθηματικές περιοχές, όπως η χωρική αναπαράσταση, η μέτρηση και η άλγεβρα. Για παράδειγμα, τα σχήματα μπορούν να αλλάξουν και ένα σημείο μπορεί να κινηθεί κατά μήκος ενός γεωμετρικού τόπου, απαιτώντας έτσι έννοιες συνάρτησης. Οι έννοιες μέτρησης είναι κεντρικής σημασίας σε αυτόν τον τομέα. Η αναγνώριση, ο χειρισμός και η ερμηνεία των σχημάτων σε περιβάλλοντα που απαιτούν εργαλεία που κυμαίνονται από λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας έως παγκόσμια συστήματα εντοπισμού θέσης (GPS) και λογισμικό μηχανικής μάθησης περιλαμβάνονται σε αυτή την κατηγορία περιεχομένου.

Το PISA υποθέτει ότι η κατανόηση ενός συνόλου βασικών εννοιών και δεξιοτήτων είναι σημαντική για τον μαθηματικό εγγραμματισμό σε σχέση με τον χώρο και το σχήμα. Ο μαθηματικός εγγραμματισμός στον τομέα του χώρου και του σχήματος περιλαμβάνει μια σειρά δραστηριοτήτων όπως η κατανόηση της προοπτικής (για παράδειγμα σε πίνακες ζωγραφικής), η δημιουργία και ανάγνωση χαρτών, ο μετασχηματισμός σχημάτων με και χωρίς τεχνολογία, η ερμηνεία όψεων τρισδιάστατων σκηνών από διάφορες οπτικές γωνίες και η κατασκευή αναπαραστάσεων σχημάτων.

Γεωμετρικές προσεγγίσεις: Ο σημερινός κόσμος είναι γεμάτος από σχήματα που δεν ακολουθούν τα τυπικά πρότυπα κανονικότητας ή συμμετρίας. Επειδή οι απλοί τύποι δεν αντιμετωπίζουν την παρατυπία, έχει γίνει πιο δύσκολο να κατανοήσουμε αυτό που βλέπουμε και να βρούμε το εμβαδόν ή

τον όγκο των δομών που προκύπτουν. Για παράδειγμα, η εύρεση της απαιτούμενης ποσότητας μοκέτας σε ένα κτίριο στο οποίο τα διαμερίσματα έχουν οξείες γωνίες μαζί με στενές καμπύλες απαιτεί μια διαφορετική προσέγγιση από ό,τι θα συνέβαινε σε ένα τυπικά ορθογώνιο δωμάτιο.

Ο προσδιορισμός των γεωμετρικών προσεγγίσεων ως κεντρικό σημείο της κατηγορίας περιεχομένου "χώρος και σχήμα" σηματοδοτεί την ανάγκη οι μαθητές να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν την κατανόηση των παραδοσιακών φαινομένων χώρου και σχήματος σε μια σειρά από τυπικές καταστάσεις.

Ποσότητα

Η έννοια της ποσότητας μπορεί να είναι η πιο διαδεδομένη και ουσιαστική μαθηματική πτυχή της ενασχόλησης με τον κόσμο μας και της λειτουργίας του. Περιλαμβάνει την ποσοτικοποίηση των χαρακτηριστικών των αντικειμένων, των σχέσεων, των καταστάσεων και των οντοτήτων στον κόσμο, την κατανόηση των διαφόρων αναπαραστάσεων αυτών των ποσοτικοποιήσεων και την αξιολόγηση ερμηνειών και επιχειρημάτων με βάση την ποσότητα. Η ενασχόληση με την ποσοτικοποίηση του κόσμου περιλαμβάνει την κατανόηση των μετρήσεων, των μεγεθών, των μονάδων, των δεικτών, του σχετικού μεγέθους και των αριθμητικών τάσεων και προτύπων. Οι πτυχές του ποσοτικού συλλογισμού - όπως η αίσθηση των αριθμών, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των αριθμών, η ευχέρεια στους υπολογισμούς, ο νοερός υπολογισμός, η εκτίμηση και η αξιολόγηση του εύλογου των αποτελεσμάτων - αποτελούν την ουσία του μαθηματικού εγγραμματισμού σε σχέση με την ποσότητα.

Η ποσοτικοποίηση είναι μια πρωταρχική μέθοδος για την περιγραφή και τη μέτρηση ενός τεράστιου συνόλου χαρακτηριστικών των πτυχών του κόσμου. Επιτρέπει τη μοντελοποίηση καταστάσεων, την εξέταση της αλλαγής και των σχέσεων, την περιγραφή και τον χειρισμό του χώρου και του σχήματος, την οργάνωση και την ερμηνεία των δεδομένων και τη μέτρηση και αξιολόγηση της αβεβαιότητας. Έτσι, ο μαθηματικός εγγραμματισμός στον τομέα της

ποσότητας εφαρμόζει τη γνώση του αριθμού και των αριθμητικών πράξεων σε μια ευρεία ποικιλία πλαισίων.

Προσομοιώσεις στον υπολογιστή: Υπάρχουν προβλήματα τόσο στα μαθηματικά όσο και στη στατιστική που δεν αντιμετωπίζονται τόσο εύκολα επειδή τα απαιτούμενα μαθηματικά είναι πολύπλοκα ή περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό παραγόντων που λειτουργούν όλοι στο ίδιο σύστημα ή λόγω ηθικών ζητημάτων που σχετίζονται με τον αντίκτυπο στα έμβια όντα ή στο περιβάλλον τους. Στον σημερινό κόσμο τα προβλήματα αυτά προσεγγίζονται όλο και περισσότερο με προσομοιώσεις σε υπολογιστές που καθοδηγούνται από αλγορίθμους. Η προσομοίωση στον υπολογιστή εκτελεί τους υπολογισμούς για τον μαθητή, αφήνοντας τον μαθητή να σχεδιάζει, να διερευνά και να επιλύει προβλήματα με βάση τις μεταβλητές που μπορεί να ελέγξει.

Ο προσδιορισμός των προσομοιώσεων μέσω υπολογιστή ως κεντρικό σημείο της κατηγορίας περιεχομένου ποσότητας σηματοδοτεί ότι στο πλαίσιο της αξιολόγησης των μαθηματικών με χρήση υπολογιστή (CBAM) του PISA που θα χρησιμοποιείται από το 2022, υπάρχει ένα ευρύ φάσμα σύνθετων προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένων του προϋπολογισμού και του προγραμματισμού, τα οποία οι μαθητές μπορούν να αναλύσουν όσον αφορά τις μεταβλητές του προβλήματος χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις υπολογιστών που παρέχονται ως μέρος του εξεταστικού αντικειμένου.

Αβεβαιότητα και δεδομένα

Στην επιστήμη, την τεχνολογία και την καθημερινή ζωή, η διακύμανση και η συνακόλουθη αβεβαιότητα είναι δεδομένες. Είναι ένα φαινόμενο που βρίσκεται στην καρδιά της θεωρίας των πιθανοτήτων και της στατιστικής. Η κατηγορία περιεχομένου αβεβαιότητα και δεδομένα περιλαμβάνει την αναγνώριση της θέσης της διακύμανσης στον πραγματικό κόσμο, συμπεριλαμβανομένης, της ικανότητας ποσοτικοποίησης της διακύμανσης και την αναγνώριση της αβεβαιότητας και του σφάλματος στα σχετικά συμπεράσματα. Περιλαμβάνει επίσης τη διαμόρφωση, ερμηνεία και

αξιολόγηση συμπερασμάτων που εξάγονται σε καταστάσεις όπου υπάρχει αβεβαιότητα. Η παρουσίαση και η ερμηνεία των δεδομένων αποτελούν βασικές έννοιες αυτής της κατηγορίας (Moore, 1997[32]).

Οι οικονομικές προβλέψεις, τα αποτελέσματα των δημοσκοπήσεων και οι προβλέψεις του καιρού περιλαμβάνουν μέτρα διακύμανσης και αβεβαιότητας. Υπάρχει διακύμανση στις παραγωγικές διαδικασίες, στα αποτελέσματα δοκιμών και στα αποτελέσματα ερευνών, και η τύχη είναι θεμελιώδης σε πολλές ψυχαγωγικές δραστηριότητες που απολαμβάνουν τα άτομα. Οι παραδοσιακοί τομείς του προγράμματος σπουδών των πιθανοτήτων και της στατιστικής παρέχουν επίσημα μέσα για την περιγραφή, μοντελοποίηση και ερμηνεία μιας συγκεκριμένης κατηγορίας φαινομένων στα οποία η διακύμανση διαδραματίζει κεντρικό ρόλο, καθώς και για την εξαγωγή αντίστοιχων στοχαστικών συμπερασμάτων. Επιπλέον, η γνώση του αριθμού και των πτυχών της άλγεβρας, όπως τα γραφήματα και η συμβολική αναπαράσταση, συμβάλλουν στην επίλυση προβλημάτων σε αυτή την κατηγορία περιεχομένου.

Λήψη αποφάσεων υπό όρους: η στατιστική παρέχει ένα μέτρο της διακύμανσης που χαρακτηρίζει ένα μεγάλο μέρος όσων οι άνθρωποι συναντούν στην καθημερινή τους ζωή. Το μέτρο αυτό είναι η διακύμανση. Όταν υπάρχουν περισσότερες από μία μεταβλητές, υπάρχει διακύμανση σε καθεμία από τις μεταβλητές καθώς και συνδιακύμανση που χαρακτηρίζει τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών. Αυτές οι αλληλοσυσχετίσεις μπορούν συχνά να αναπαρασταθούν σε αμφίδρομους πίνακες που παρέχουν τη βάση για τη λήψη αποφάσεων υπό όρους (συμπερασμάτων). Σε έναν αμφίδρομο πίνακα για δύο διχότομες μεταβλητές (δηλαδή δύο μεταβλητές με δύο δυνατότητες η καθεμία), υπάρχουν τέσσερις συνδυασμοί. Ο πίνακας διπλής εισόδου (ανάλυση της κατάστασης) παρέχει τρία είδη ποσοστών τα οποία, με τη σειρά τους, παρέχουν εκτιμήσεις των αντίστοιχων πιθανοτήτων. Αυτές περιλαμβάνουν τις πιθανότητες των τεσσάρων κοινών γεγονότων, τις δύο οριακές και τις υπό συνθήκη πιθανότητες, οι οποίες παίζουν τον κεντρικό ρόλο σε αυτό που ονομάσαμε λήψη αποφάσεων υπό συνθήκη. Η προσδοκία για τα θέματα αξιολόγησης του PISA είναι ότι οι μαθητές θα είναι σε θέση να

διαβάζουν τα σχετικά δεδομένα από τον πίνακα με βαθιά κατανόηση για το νόημα των δεδομένων που εξάγουν.

Ο προσδιορισμός της λήψης αποφάσεων υπό όρους ως κεντρικό σημείο της κατηγορίας αβεβαιότητας και περιεχομένου δεδομένων σηματοδοτεί ότι οι μαθητές θα πρέπει να εκτιμούν πώς η διατύπωση της ανάλυσης σε ένα μοντέλο επηρεάζει τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν και ότι διαφορετικές υποθέσεις/σχέσεις μπορεί κάλλιστα να οδηγήσουν σε διαφορετικά συμπεράσματα.

Θέματα περιεχομένου για την καθοδήγηση της αξιολόγησης του μαθηματικού εγγραμματισμού 15χρονων μαθητών

Η αποτελεσματική κατανόηση και επίλυση πλαισιωμένων προβλημάτων διατυπωμένα σε πραγματικά πλαίσια που αφορούν αλλαγές και σχέσεις, χώρο και σχήμα, ποσότητα, αβεβαιότητα και δεδομένα απαιτεί την αξιοποίηση μιας ποικιλίας μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών, γεγονότων και εργαλείων σε κατάλληλο επίπεδο βάθους και πολυπλοκότητας. Ως αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματισμού, το PISA προσπαθεί να αξιολογήσει τα επίπεδα και τα είδη μαθηματικών που είναι κατάλληλα για τους 15χρονους μαθητές που βρίσκονται σε τροχιά να γίνουν δημιουργικοί, ενεργοί και σκεπτόμενοι πολίτες του 21^{ου} αιώνα, ικανοί να λαμβάνουν τεκμηριωμένες κρίσεις και αποφάσεις. Είναι επίσης γεγονός ότι το PISA, αν και δεν έχει σχεδιαστεί ή σχεδιαστεί να είναι μια αξιολόγηση με βάση το πρόγραμμα σπουδών, προσπαθεί να αντικατοπτρίζει τα μαθηματικά που οι μαθητές είχαν πιθανώς την ευκαιρία να μάθουν μέχρι τη στιγμή που είναι 15 ετών.

Κατά την ανάπτυξη του πλαισίου του μαθηματικού εγγραμματισμού του PISA 2012, με στόχο την ανάπτυξη μιας αξιολόγησης που να είναι τόσο προοδευτική όσο και να αντικατοπτρίζει τα μαθηματικά που οι 15χρονοι μαθητές είχαν πιθανότατα την ευκαιρία να μάθουν, διεξήχθησαν αναλύσεις ενός δείγματος επιθυμητών μαθησιακών αποτελεσμάτων από έντεκα χώρες για να προσδιοριστεί τι διδάσκονται οι μαθητές στις τάξεις σε όλο τον κόσμο και τι θεωρούν οι χώρες ρεαλιστική και σημαντική προετοιμασία για τους

μαθητές καθώς πλησιάζουν στην είσοδο στο χώρο εργασίας ή στην εισαγωγή σε ένα ίδρυμα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Με βάση τις ομοιότητες που εντοπίστηκαν σε αυτές τις αναλύσεις, σε συνδυασμό με την κρίση των εμπειρογνομόνων των μαθηματικών, το περιεχόμενο που κρίθηκε κατάλληλο για να συμπεριληφθεί στην αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματισμού των 15χρονων μαθητών στο πλαίσιο του PISA 2012 και συνεχίστηκε για το PISA 2022, περιγράφεται παρακάτω.

Για το PISA 2022, στον κατάλογο έχουν προστεθεί τέσσερα επιπλέον θέματα εστίασης. Οι κατάλογοι που προκύπτουν έχουν σκοπό να είναι ενδεικτικοί των θεμάτων περιεχομένου που περιλαμβάνονται στο PISA 2022 και όχι να είναι ένας εξαντλητικός κατάλογος:

- *Φαινόμενα ανάπτυξης*: Διαφορετικοί τύποι γραμμικής και μη γραμμικής αύξησης.
- *Γεωμετρική προσέγγιση*: Προσέγγιση των χαρακτηριστικών και των ιδιοτήτων ακανόνιστων ή άγνωστων σχημάτων και αντικειμένων με το σπάσιμο αυτών των σχημάτων και αντικειμένων σε πιο οικεία σχήματα και αντικείμενα για τα οποία υπάρχουν τύποι και εργαλεία.
- *Υπολογιστικές προσομοιώσεις*: Διερεύνηση καταστάσεων (που μπορεί να περιλαμβάνουν προϋπολογισμό, προγραμματισμό, κατανομή πληθυσμού, εξάπλωση ασθενειών, πειραματική πιθανότητα, μοντελοποίηση χρόνου αντίδρασης κ.λπ.) όσον αφορά τις μεταβλητές και τον αντίκτυπο που αυτές έχουν στο αποτέλεσμα.
- *Λήψη αποφάσεων υπό όρους*: Χρήση βασικών αρχών συνδυαστικής και κατανόηση των σχέσεων μεταξύ μεταβλητών για την ερμηνεία καταστάσεων και την πραγματοποίηση προβλέψεων.
- *Λειτουργίες*: Η έννοια της συνάρτησης, με έμφαση αλλά όχι περιορισμένη στις γραμμικές συναρτήσεις, τις ιδιότητές τους και μια ποικιλία περιγραφών και αναπαραστάσεων τους. Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι λεκτικές, συμβολικές, σε μορφή πίνακα και γραφικές.
- *Αλγεβρικές εκφράσεις*: Λεκτική ερμηνεία και χειρισμός αλγεβρικών εκφράσεων, που περιλαμβάνουν αριθμούς, σύμβολα, αριθμητικές πράξεις, δυνάμεις και απλές ρίζες.

- *Εξισώσεις και ανισώσεις:* Γραμμικές και συναφείς εξισώσεις και ανισώσεις, απλές εξισώσεις δευτέρου βαθμού και αναλυτικές και μη αναλυτικές μέθοδοι επίλυσης.
- *Συστήματα συντεταγμένων:* Αναπαράσταση και περιγραφή δεδομένων, θέσης και σχέσεων.
- *Σχέσεις εντός και μεταξύ γεωμετρικών αντικειμένων σε δύο και τρεις διαστάσεις:* (π.χ. το Πυθαγόρειο θεώρημα που ορίζει τη σχέση μεταξύ των μηκών των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου), η σχετική θέση, η ομοιότητα και η σύμπτωση, και δυναμικές σχέσεις που αφορούν το μετασχηματισμό και την κίνηση των αντικειμένων, καθώς και αντιστοιχίες μεταξύ δισδιάστατων και τρισδιάστατων αντικειμένων.
- *Μέτρηση:* Ποσοτικός προσδιορισμός των χαρακτηριστικών των σχημάτων και των αντικειμένων και μεταξύ αυτών, όπως γωνίες, απόσταση, μήκος, περίμετρος, περιφέρεια, εμβαδόν και όγκος.
- *Αριθμοί και μονάδες:* Έννοιες, αναπαραστάσεις αριθμών και αριθμητικών συστημάτων (συμπεριλαμβανομένης της μετατροπής μεταξύ αριθμητικών συστημάτων), συμπεριλαμβανομένων των ιδιοτήτων των ακέραιων και λογικών αριθμών, καθώς και των ποσοτήτων και μονάδων που αναφέρονται σε φαινόμενα όπως ο χρόνος, το χρήμα, το βάρος, η θερμοκρασία, η απόσταση, το εμβαδόν και ο όγκος, καθώς και των παραγόμενων ποσοτήτων και της αριθμητικής τους περιγραφής.
- *Αριθμητικές πράξεις:* Η φύση και οι ιδιότητες αυτών των πράξεων και οι σχετικές συμβολιστικές συμβάσεις.
- *Ποσοστά, αναλογίες και λόγοι:* Αριθμητική περιγραφή του σχετικού μεγέθους και εφαρμογή των αναλογιών και της αναλογικός συλλογισμός για την επίλυση προβλημάτων.
- *Αρχές καταμέτρησης:* Απλοί συνδυασμοί.
- *Εκτίμηση:* Προσέγγιση ποσοτήτων και αριθμητικών εκφράσεων με σκοπό, συμπεριλαμβανομένων των σημαντικών ψηφίων και της στρογγυλοποίησης.
- *Συλλογή, αναπαράσταση και ερμηνεία δεδομένων:* Φύση, γένεση και συλλογή διαφόρων τύπων δεδομένων, καθώς και οι διάφοροι τρόποι ανάλυσης, αναπαράστασης και ερμηνείας τους.

- *Μεταβλητότητα δεδομένων και περιγραφή της:* Έννοιες όπως η μεταβλητότητα, η κατανομή και η κεντρική τάση των συνόλων δεδομένων και τρόποι περιγραφής και ερμηνείας τους με ποσοτικούς και γραφικούς όρους.
- *Δείγματα και δειγματοληψία:* Έννοιες της δειγματοληψίας και της δειγματοληψίας από πληθυσμούς δεδομένων, συμπεριλαμβανομένων απλών συμπερασμάτων με βάση τις ιδιότητες των δειγμάτων, συμπεριλαμβανομένης της ακρίβειας και της πιστότητας.
- *Τυχαιότητα και πιθανότητα:* Η έννοια των τυχαίων γεγονότων, η τυχαία μεταβολή και η αναπαράστασή της, η τύχη και η συχνότητα των γεγονότων και βασικές πτυχές της έννοιας της πιθανότητας και της υπό συνθήκη πιθανότητας.

Πλαίσια για τα θέματα αξιολόγησης και επιλεγμένες δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα

Ο ορισμός του μαθηματικού εγγραμματισμού εισάγει δύο σημαντικές παραμέτρους για τα στοιχεία αξιολόγησης του PISA. Πρώτον, ο ορισμός καθιστά σαφές ότι ο μαθηματικός εγγραμματισμός λαμβάνει χώρα σε πραγματικές συνθήκες. Δεύτερον, ο μαθηματικός εγγραμματισμός βοηθά τα άτομα να γνωρίζουν το ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στον κόσμο και να κάνουν τις τεκμηριωμένες κρίσεις και αποφάσεις που απαιτούνται για δημιουργικούς, ενεργούς και σκεπτόμενους πολίτες του 21^{ου} αιώνα. Σε αυτή την ενότητα συζητάμε πώς τόσο τα πλαίσια του πραγματικού κόσμου όσο και οι δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα επηρεάζουν την ανάπτυξη των αντικειμένων.

Ο πραγματικός χαρακτήρας του μαθηματικού εγγραμματισμού δεν είναι απροβλημάτιστος για το PISA. Τα πλαίσια του πραγματικού κόσμου περιλαμβάνουν πληροφορίες που παρουσιάζονται μέσω κειμένου. Οι ποσοτικές και στατιστικές πληροφορίες που διακινούνται στον κόσμο και φτάνουν στους πολίτες επικοινωνούνται μέσω έντυπου ή προφορικού κειμένου, π.χ. άρθρα των μέσων ενημέρωσης, δελτία τύπου, ιστολόγια, κοινωνικά δίκτυα, διαφημίσεις κ.λπ. Αυτό το έντυπο και προφορικό κείμενο χρησιμοποιείται για την παρουσίαση μηνυμάτων ή επιχειρημάτων που μπορεί να περιλαμβάνουν ή όχι αριθμούς ή/και γραφήματα. Το κείμενο είναι

το κύριο εργαλείο για την επικοινωνία του περιεχομένου και, εκ τούτου, η κατανόηση κειμένου είναι μια θεμελιώδης και προαπαιτούμενη δεξιότητα για την επιτυχία στον μαθηματικό εγγραμματισμό. Η πρόκληση που δημιουργεί αυτό για το PISA και την ανάπτυξη θεμάτων/ερωτήσεων αξιολόγησης δεν είναι αμελητέα. Αφενός η αξιολόγηση πρέπει να παρουσιάζει κοινωνικά σημαντικά ποσοτικά μηνύματα χρησιμοποιώντας πλούσιο κείμενο, αφετέρου ο συγκριτικός χαρακτήρας της αξιολόγησης, οι πολλές γλώσσες στις οποίες μεταφράζεται και το ευρύ φάσμα των επιπέδων κατανόησης κειμένου μεταξύ των συμμετεχόντων 15χρονων θέτει όρια στον πλούτο του κειμένου που μπορεί ρεαλιστικά να χρησιμοποιηθεί. Η πρόκληση αυτή εξετάζεται περαιτέρω στην ενότητα σχετικά με την ανάπτυξη θεμάτων αξιολόγησης.

Πλαίσια

Μια σημαντική πτυχή του μαθηματικού εγγραμματισμού είναι ότι τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός προβλήματος που τίθεται σε ένα πλαίσιο. Το πλαίσιο είναι η πτυχή του κόσμου του ατόμου στην οποία τοποθετούνται τα προβλήματα. Η επιλογή των κατάλληλων μαθηματικών στρατηγικών και αναπαραστάσεων εξαρτάται συχνά από το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται ένα πρόβλημα και, κατά συνέπεια, υπάρχει η ανάγκη να αξιοποιηθεί η γνώση του πραγματικού περιβάλλοντος κατά την ανάπτυξη του μοντέλου. Η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων εντός ενός πλαισίου εκτιμάται ευρέως ότι θέτει πρόσθετες απαιτήσεις στον επιλύτη προβλημάτων (βλέπε Watson and Callingham, (2003[33]), για ευρήματα σχετικά με τη στατιστική).

Για το PISA, είναι σημαντικό να χρησιμοποιείται μεγάλη ποικιλία πλαισίων. Αυτό προσφέρει τη δυνατότητα σύνδεσης με το ευρύτερο δυνατό φάσμα ατομικών ενδιαφερόντων και με το φάσμα των καταστάσεων στις οποίες τα άτομα δραστηριοποιούνται στον 21ο αιώνα.

Λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμό των χωρών που συμμετέχουν στον PISA 2022 και μαζί με αυτόν ένα αυξανόμενο εύρος συμμετεχόντων από χώρες

χαμηλού και μεσαίου εισοδήματος, καθώς και την πιθανότητα 15χρονων εκτός σχολείου, είναι σημαντικό οι δημιουργοί των θεμάτων αξιολόγησης να προσέξουν πολύ ώστε να διασφαλίσουν ότι τα πλαίσια που χρησιμοποιούνται για τα θέματα είναι προσβάσιμα σε ένα πολύ ευρύ φάσμα συμμετεχόντων. Από αυτή την άποψη είναι επίσης σημαντικό το αναγνωστικό φορτίο των θεμάτων αξιολόγησης να παραμένει μέτριο, ώστε τα αντικείμενα να συνεχίσουν να αξιολογούν τον μαθηματικό εγγραμματισμό.

Για τους σκοπούς του πλαισίου του PISA 2022 για τα Μαθηματικά, οι τέσσερις κατηγορίες πλαισίου από το PISA 2012 έχουν διατηρηθεί και χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη στοιχείων αξιολόγησης. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, ενώ αυτά τα πλαίσια προορίζονται για την ανάπτυξη στοιχείων, δεν αναμένεται ότι θα υπάρξει υποβολή εκθέσεων με βάση αυτά τα πλαίσια.

Προσωπικό - Τα προβλήματα που ταξινομούνται στην κατηγορία του προσωπικού πλαισίου εστιάζουν σε δραστηριότητες του εαυτού, της οικογένειας ή της ομάδας συνομηλίκων. Τα είδη των πλαισίων που μπορούν να θεωρηθούν προσωπικά περιλαμβάνουν (αλλά δεν περιορίζονται σε αυτά) εκείνα που αφορούν την προετοιμασία του φαγητού, τα ψώνια, τα παιχνίδια, την προσωπική υγεία, την προσωπική μεταφορά, την αναψυχή, τον αθλητισμό, τα ταξίδια, τον προσωπικό προγραμματισμό και τα οικονομικά ενός ατόμου.

Επαγγελματικό - Τα προβλήματα που κατατάσσονται στην κατηγορία επαγγελματικό πλαίσιο επικεντρώνονται στον κόσμο της εργασίας. Τα στοιχεία που κατηγοριοποιούνται ως επαγγελματικά μπορεί να περιλαμβάνουν (αλλά δεν περιορίζονται σε αυτά), όπως μέτρηση, κοστολόγηση και παραγγελία υλικών για οικοδομή, μισθοδοσία/λογιστική, ποιοτικός έλεγχος, προγραμματισμός/απογραφή, σχεδιασμός/αρχιτεκτονική και λήψη αποφάσεων που σχετίζονται με την εργασία είτε με είτε χωρίς κατάλληλη τεχνολογία. Τα επαγγελματικά πλαίσια μπορούν να αφορούν οποιοδήποτε επίπεδο του εργατικού δυναμικού, από την ανειδίκευτη

εργασία έως τα υψηλότερα επίπεδα επαγγελματικής εργασίας, αν και τα στοιχεία της έρευνας PISA πρέπει να είναι προσβάσιμα σε 15χρονους μαθητές.

Κοινωνικό - Τα προβλήματα που ταξινομούνται στην κατηγορία του κοινωνικού πλαισίου εστιάζουν στην κοινότητα του ατόμου (τοπική, εθνική ή παγκόσμια). Μπορεί να αφορούν (αλλά δεν περιορίζονται σε αυτά) πράγματα όπως τα συστήματα ψηφοφορίας, οι δημόσιες μεταφορές, η κυβέρνηση, οι δημόσιες πολιτικές, τα δημογραφικά στοιχεία, η διαφήμιση, η υγεία, η ψυχαγωγία, οι εθνικές στατιστικές και τα οικονομικά. Αν και τα άτομα εμπλέκονται σε όλα αυτά τα πράγματα με προσωπικό τρόπο, στην κατηγορία του κοινωνικού πλαισίου, η εστίαση των προβλημάτων είναι στην προοπτική της κοινότητας.

Επιστημονικό - Τα προβλήματα που ταξινομούνται στην κατηγορία επιστημονικό πλαίσιο αφορούν την εφαρμογή των μαθηματικών στον φυσικό κόσμο και ζητήματα και θέματα που σχετίζονται με την επιστήμη και την τεχνολογία. Τα συγκεκριμένα πλαίσια μπορεί να περιλαμβάνουν (αλλά δεν περιορίζονται σε αυτά) τομείς όπως ο καιρός ή το κλίμα, η οικολογία, η ιατρική, η επιστήμη του διαστήματος, η γενετική, η μέτρηση και ο ίδιος ο κόσμος των μαθηματικών. Τα αντικείμενα που είναι καθαρά μαθηματικά, όπου όλα τα στοιχεία που εμπλέκονται ανήκουν στον κόσμο των μαθηματικών, εμπίπτουν στο επιστημονικό πλαίσιο.

Τα θέματα αξιολόγησης του PISA είναι διατεταγμένα σε ενότητες που μοιράζονται ίδιο υλικό. Επομένως, συνήθως όλα τα στοιχεία της ίδιας μονάδας ανήκουν στην ίδια κατηγορία πλαισίου. Για παράδειγμα, το ερέθισμα μπορεί να εξετάζεται από προσωπική σκοπιά σε ένα αντικείμενο και από κοινωνική σκοπιά σε ένα άλλο. Όταν ένα στοιχείο περιλαμβάνει μόνο μαθηματικές κατασκευές χωρίς αναφορά στα στοιχεία του πλαισίου της ενότητας στην οποία βρίσκεται, κατατάσσεται στην κατηγορία πλαισίου της ενότητας. Στην ασυνήθιστη περίπτωση μιας ενότητας που περιλαμβάνει μόνο μαθηματικές κατασκευές και δεν έχει αναφορά σε κανένα πλαίσιο εκτός των μαθηματικών, η ενότητα κατατάσσεται στην κατηγορία επιστημονικού

πλαίσιου.

Η χρήση αυτών των κατηγοριών πλαισίων παρέχει τη βάση για την επιλογή ενός συνδυασμού πλαισίων θεμάτων/ερωτήσεων αξιολόγησης και διασφαλίζει ότι η αξιολόγηση αντικατοπτρίζει ένα ευρύ φάσμα χρήσεων των μαθηματικών, από τις καθημερινές προσωπικές χρήσεις μέχρι τις επιστημονικές απαιτήσεις των παγκόσμιων προβλημάτων. Επιπλέον, είναι σημαντικό κάθε κατηγορία πλαισίου να συμπληρώνεται με αντικείμενα αξιολόγησης που έχουν ένα ευρύ φάσμα δυσκολιών. Δεδομένου ότι ο κύριος σκοπός αυτών των κατηγοριών πλαισίου είναι να προκαλέσουν τους μαθητές σε ένα ευρύ φάσμα προβληματικών πλαισίων, κάθε κατηγορία θα πρέπει να συμβάλλει ουσιαστικά στη μέτρηση του μαθηματικού εγγραμματισμού. Το επίπεδο δυσκολίας των θεμάτων αξιολόγησης που αντιπροσωπεύουν μια κατηγορία πλαισίου δεν θα πρέπει να είναι συστηματικά υψηλότερο ή χαμηλότερο από το επίπεδο δυσκολίας των θεμάτων αξιολόγησης μιας άλλης κατηγορίας.

Κατά τον προσδιορισμό των πλαισίων που μπορεί να είναι συναφή, είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου ότι ένας από τους σκοπούς της αξιολόγησης είναι να μετρήσει τη χρήση των γνώσεων και των δεξιοτήτων μαθηματικού περιεχομένου που έχουν αποκτήσει οι μαθητές μέχρι την ηλικία των 15 ετών. Συνεπώς, τα πλαίσια για τα αντικείμενα αξιολόγησης επιλέγονται υπό το πρίσμα της συνάφειας με τα ενδιαφέροντα και τη ζωή των μαθητών και τις απαιτήσεις που θα τεθούν από αυτούς καθώς θα εισέρχονται στην κοινωνία ως δημιουργικοί, ενεργοί και σκεπτόμενοι πολίτες. Οι εθνικοί υπεύθυνοι του έργου από τις χώρες που συμμετέχουν στην έρευνα PISA συμμετέχουν στην αξιολόγηση του βαθμού αυτής της συνάφειας.

Δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα

Υπάρχει αυξημένο ενδιαφέρον παγκοσμίως για τις λεγόμενες δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα και την πιθανή ένταξή τους στα εκπαιδευτικά συστήματα. Ο ΟΟΣΑ εξέδωσε μια δημοσίευση που επικεντρώνεται στις δεξιότητες αυτές και χρηματοδότησε ένα ερευνητικό πρόγραμμα με τίτλο “Το μέλλον της

εκπαίδευσης και των δεξιοτήτων: Ένα πλαίσιο ΟΟΣΑ 2030” στο οποίο περίπου 25 χώρες συμμετέχουν σε μια διακρατική μελέτη των προγραμμάτων σπουδών, συμπεριλαμβανομένης της ενσωμάτωσης τέτοιων δεξιοτήτων. Το έργο έχει ως κεντρικό άξονα το πώς θα μπορούσε να μοιάζει το πρόγραμμα σπουδών στο μέλλον, εστιάζοντας αρχικά στα μαθηματικά και τη φυσική αγωγή.

Τα τελευταία 15 περίπου χρόνια μια σειρά δημοσιεύσεων προσπάθησαν να αποσαφηνίσουν τη συζήτηση και την εξέταση των δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα. Μια περίληψη των βασικών εκθέσεων και της εννοιολογικής τους προσέγγισης των δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα παρέχεται στο PISA 2021 Mathematics: Μια διευρυμένη προοπτική [EDU/PISA/GB(2017)17]. Μετά από προσεκτική ανάλυση αυτών των δημοσιεύσεων, οι συγγραφείς συνέστησαν ότι μπορεί να γίνει μια ισχυρή επιχειρηματολογία για την ενσωμάτωση συγκεκριμένων δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα σε συγκεκριμένους κλάδους. Για παράδειγμα, θα καταστεί όλο και πιο σημαντικό να διδάσκονται οι μαθητές στο σχολείο πώς να διατυπώνουν λογικά επιχειρήματα με κατάλληλη αιτιολόγηση. Τα επιχειρήματα που διατυπώνουν θα πρέπει να είναι μαθηματικά αυστηρά, να βασίζονται σε ορθή θεωρία και να είναι αρκετά ισχυρά ώστε να αντέχουν στην κριτική, αλλά και, όποτε είναι δυνατόν, να αποφεύγεται η αναφορά σε αυθεντίες (π.χ. "έτσι λέει το διαδίκτυο"). Αυτό αποτελεί μέρος της θεμελιώδους ικανότητας να προβαίνουν σε ανεξάρτητες κρίσεις και να αναλαμβάνουν την ευθύνη γι' αυτές (OECD, 2005[34]). Στο κοινωνικό πλαίσιο δεν αρκεί να έχει κανείς δίκιο- πρέπει να είναι ικανός και έτοιμος να παρουσιάσει επιχειρήματα και να τα υπερασπιστεί. Η εκμάθηση των μαθηματικών, με τη σαφήνεια των πλαισίων και τη μεγάλη έμφαση στη λογική επιχειρηματολογία και την αυστηρότητα στο κατάλληλο, είναι μια τέλεια ευκαιρία για να εξασκηθείτε και να αναπτύξετε την ικανότητα αυτού του είδους επιχειρηματολογίας.

Ομοίως, στη σύγχρονη εποχή, είναι κρίσιμο να εφοδιάσουμε τους μαθητές με εργαλεία που θα μπορούν να χρησιμοποιήσουν για να υπερασπιστούν τον εαυτό τους από ψέματα και συμπεράσματα που υποτίθεται ότι βασίζονται σε μαθηματικό συλλογισμό. Πολύ συχνά αρκεί κάποια ευχέρεια στον λογικό

συλλογισμό- ένα ψέμα συνήθως κρύβει κάποια κρυφή αντίφαση. Η εγρήγορση των νεαρών μυαλών απέναντι σε πιθανές αντιφάσεις μπορεί να αναπτυχθεί ευκολότερα σε καλές τάξεις μαθηματικών.

Χρησιμοποιώντας τη λογική της εύρεσης της διασταύρωσης μεταξύ των γενικών δεξιοτήτων του 21ου αιώνα και των συναφών, αλλά συγκεκριμένων δεξιοτήτων που αποτελούν φυσικό μέρος διδασκαλίας που σχετίζεται με το εν λόγω, προκύπτουν οι ακόλουθες οκτώ δεξιότητες του 21ου αιώνα για συμπερίληψη στο πλαίσιο αξιολόγησης PISA 2022. Είναι οι εξής:

- κριτική σκέψη,
- δημιουργικότητα,
- έρευνα και διερεύνηση,
- μεταγνωστική ικανότητα, πρωτοβουλία και επιμονή,
- χρήση πληροφορίας,
- συστημική σκέψη,
- επικοινωνία,
- αναστοχασμός.

Αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματισμού

Η παρούσα ενότητα περιγράφει την προσέγγιση που ακολουθήθηκε για την εφαρμογή των στοιχείων του πλαισίου που περιγράφηκε στις προηγούμενες ενότητες στην έρευνα του PISA για το 2022. Αυτό περιλαμβάνει τη δομή της μαθηματικής συνιστώσας της έρευνας PISA, την επιθυμητή κατανομή των βαθμών βαθμολογίας για τη μαθηματική σκέψη και τις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων, την κατανομή των βαθμών βαθμολογίας ανά τομέα περιεχομένου, μια συζήτηση σχετικά με το εύρος των δυσκολιών των αντικειμένων, τη δομή του εργαλείου της έρευνας, το ρόλο της ηλεκτρονικής αξιολόγησης των μαθηματικών, το σχεδιασμό των αντικειμένων αξιολόγησης και την αναφορά των επιπέδων μαθηματικής επάρκειας.

Δομή της αξιολόγησης μαθηματικών PISA 2022

Σύμφωνα με τον ορισμό του μαθηματικού εγγραμματισμού, τα θέματα αξιολόγησης που χρησιμοποιούνται σε όλα τα εργαλεία που αναπτύσσονται στο πλαίσιο της έρευνας PISA εντάσσονται σε ένα πλαίσιο. Τα θέματα αξιολόγησης αφορούν την εφαρμογή σημαντικών μαθηματικών εννοιών, γνώσεων, κατανοήσεων και δεξιοτήτων (μαθηματικού περιεχομένου) στο κατάλληλο επίπεδο για 15χρονους μαθητές, όπως περιγράφηκε προηγουμένως. Το πλαίσιο χρησιμοποιείται για να καθοδηγήσει τη δομή και το περιεχόμενο της αξιολόγησης, και είναι σημαντικό το όργανο της αξιολόγησης να περιλαμβάνει την κατάλληλη ισορροπία των στοιχείων που αντικατοπτρίζουν τις συνιστώσες του πλαισίου του μαθηματικού εγγραμματισμού.

Επιθυμητή κατανομή της βαθμολογίας ανά μαθηματικό συλλογισμό και διαδικασία επίλυσης προβλημάτων

Τα θέματα αξιολόγησης στον μαθηματικό εγγραμματισμό του PISA 2022 μπορούν να αντιστοιχιστούν είτε στον μαθηματικό συλλογισμό είτε σε μία από τις τρεις μαθηματικές διαδικασίες που σχετίζονται με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Ο στόχος κατά την κατασκευή των θεμάτων

αξιολόγησης είναι να επιτευχθεί μια ισορροπία που να παρέχει περίπου ίση βαρύτητα μεταξύ των δύο διαδικασιών που αφορούν τη σύνδεση μεταξύ του πραγματικού κόσμου και του μαθηματικού κόσμου (διατύπωση και ερμηνεία/αξιολόγηση) και του μαθηματικού συλλογισμού και της εφαρμογής που απαιτούν από τους μαθητές να είναι σε θέση να εργαστούν πάνω σε ένα μαθηματικά διατυπωμένο πρόβλημα. Παρόλο που είναι αλήθεια ότι ο μαθηματικός συλλογισμός μπορεί να παρατηρηθεί κατά τη διαδικασία της διατύπωσης, της ερμηνείας και της εφαρμογής, κάθε θέμα αξιολόγησης συμβάλει μόνο σε μία κατηγορία.

Πίνακας 1. Προσεγγιστική κατανομή των βαθμών ανά τομέα για τον PISA 2022

		Ποσοστό των μονάδων βαθμολόγησης στο PISA 2022
Μαθηματικός συλλογισμός		Κατά προσέγγιση 25
Μαθηματική επίλυση προβλημάτων	Διατύπωση καταστάσεων μαθηματικά.	Κατά προσέγγιση 25
	Εφαρμογή μαθηματικών εννοιών, γεγονότων και διαδικασιών.	Κατά προσέγγιση 25
	Ερμηνεία, εφαρμογή και αξιολόγηση μαθηματικών αποτελεσμάτων.	Κατά προσέγγιση 25
ΣΥΝΟΛΟ		100

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι τα θέματα αξιολόγησης σε κάθε κατηγορία διεργασιών πρέπει να έχουν ένα εύρος δυσκολίας και μαθηματικών απαιτήσεων. Αυτό εξετάζεται περαιτέρω στον πίνακα των απαιτήσεων για τον μαθηματικό συλλογισμό και για κάθε μία από τις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων.

Επιθυμητή κατανομή των μονάδων βαθμολόγησης ανά κατηγορία περιεχομένου

Τα θέματα αξιολόγησης για τα μαθηματικά του PISA επιλέγονται έτσι ώστε να αντικατοπτρίζουν το μαθηματικό περιεχόμενο που περιγράφηκε νωρίτερα σε αυτό το πλαίσιο. Τα στοιχεία τάσης που επιλέγονται για τον PISA 2022 θα κατανεμηθούν στις τέσσερις κατηγορίες περιεχομένου, όπως φαίνεται στον πίνακα 2.2. Ο στόχος κατά την κατασκευή της έρευνας είναι μια κατανομή των στοιχείων σε σχέση με την κατηγορία περιεχομένου που να παρέχει μια όσο το δυνατόν πιο ισορροπημένη κατανομή των μονάδων βαθμολογίας, δεδομένου ότι όλοι αυτοί οι τομείς είναι σημαντικοί για δημιουργικούς, ενεργούς και σκεπτόμενους πολίτες.

Πίνακας 2. Προσεγγιστική κατανομή των βαθμών ανά κατηγορία περιεχομένου για τον PISA 2022

Κατηγορία περιεχομένου	Ποσοστό των μονάδων βαθμολόγησης στο PISA 2022
Αλλαγή και σχέσεις	Κατά προσέγγιση 25
Χώρος και σχήμα	Κατά προσέγγιση 25
Ποσότητα	Κατά προσέγγιση 25
Αβεβαιότητα και δεδομένα	Κατά προσέγγιση 25
ΣΥΝΟΛΟ	100

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι τα αντικείμενα σε κάθε κατηγορία περιεχομένου θα πρέπει να έχουν ένα εύρος δυσκολίας και μαθηματικών απαιτήσεων.

Διαβάθμιση βαθμού δυσκολίας θεμάτων αξιολόγησης

Η έρευνα του PISA 2022 για τον μαθηματικό εγγραμματισμό περιλαμβάνει στοιχεία με ευρύ φάσμα δυσκολιών, παράλληλα με το εύρος των ικανοτήτων των 15χρονων μαθητών. Περιλαμβάνει στοιχεία που αποτελούν πρόκληση για τους πιο ικανούς και στοιχεία που είναι κατάλληλα για τους λιγότερο ικανούς μαθητές που αξιολογούνται στον μαθηματικό εγγραμματισμό. Από ψυχομετρική άποψη, μια έρευνα που έχει σχεδιαστεί για τη μέτρηση μιας συγκεκριμένης ομάδας ατόμων είναι πιο αποτελεσματική και αποδοτική όταν η δυσκολία των αντικειμένων αξιολόγησης αντιστοιχεί στην ικανότητα των μετρούμενων ατόμων. Επιπλέον, οι περιγραφόμενες κλίμακες επάρκειας που χρησιμοποιούνται ως κεντρικό μέρος της αναφοράς των αποτελεσμάτων του PISA μπορούν να περιλαμβάνουν χρήσιμα στοιχεία για όλους τους μαθητές μόνο εάν τα θέματα αξιολόγησης από τα οποία αντλούνται οι περιγραφές επάρκειας καλύπτουν το εύρος των περιγραφόμενων ικανοτήτων.

Ο Πίνακας 3 περιγράφει το εύρος των ενεργειών που αναμένονται από τους μαθητές για τον μαθηματικό συλλογισμό και για κάθε μία από τις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. Αυτοί οι κατάλογοι περιγράφουν τις ενέργειες που απαιτούν τα αντικείμενα από τους μαθητές. Για κάθε κατηγορία υπάρχει ένας αριθμός ερωτήσεων αξιολόγησης που σημειώνονται με "***" για να υποδηλώσουν τις ενέργειες που αναμένονται από τους μαθητές που θα αποδώσουν στα επίπεδα 1a, 1b και 1c καθώς και στο επίπεδο 2 της κλίμακας επάρκειας. Οι κατασκευαστές των θεμάτων αξιολόγησης θα πρέπει να διασφαλίσουν ότι υπάρχουν επαρκή αντικείμενα στο χαμηλότερο άκρο της κλίμακας επιδόσεων, ώστε οι μαθητές σε αυτά τα επίπεδα να είναι σε θέση να δείξουν τι είναι ικανοί να κάνουν.

Προκειμένου να αποκτηθούν χρήσιμες πληροφορίες για τα νέα χαμηλότερα επίπεδα, 1b και 1c, είναι ζωτικής σημασίας το πλαίσιο και η γλώσσα να μην επηρεάζουν τα αξιολογούμενα μαθηματικά. Για το σκοπό αυτό, το πλαίσιο και η διατύπωση πρέπει να επιλεγθούν προσεκτικά. Ως εκ τούτου, τα θέματα πρέπει να εξακολουθούν να είναι ενδιαφέροντα για να αποφευχθεί η πιθανότητα οι μαθητές να μην επιχειρήσουν να τα εξετάσουν/ απαντήσουν

επειδή δεν παρουσιάζουν ενδιαφέρον.

Το πλαίσιο για τις ερωτήσεις αξιολόγησης των επιπέδων 1b και 1c θα πρέπει να είναι καταστάσεις που οι μαθητές αντιμετωπίζουν καθημερινά.

Παραδείγματα αυτών των πλαισίων μπορεί να περιλαμβάνουν χρήματα, θερμοκρασία, τρόφιμα, ώρα, ημερομηνία, βάρος, μέγεθος και απόσταση.

Όλα τα θέματα αξιολόγησης πρέπει να είναι συγκεκριμένα και όχι αφηρημένα. Η εστίαση στα θέματα αξιολόγησης θα πρέπει να είναι μόνο μαθηματική. Η κατανόηση του πλαισίου δεν πρέπει να παρεμβαίνει στην εκτέλεση του θέματος αξιολόγησης.

Εξίσου σημαντικό είναι να διατυπώνονται όλα τα θέματα αξιολόγησης με τους απλούστερους δυνατούς όρους. Οι προτάσεις πρέπει να είναι σύντομες και άμεσες. Οι σύνθετες προτάσεις, τα σύνθετα ουσιαστικά και οι υπό όρους προτάσεις πρέπει να αποφεύγονται. Το λεξιλόγιο που χρησιμοποιείται στα θέματα πρέπει να εξετάζεται προσεκτικά για να διασφαλιστεί ότι οι μαθητές θα έχουν σαφή κατανόηση του τι απαιτείται. Επιπλέον, θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή ώστε να διασφαλιστεί ότι δεν προστίθεται επιπλέον δυσκολία λόγω μεγάλου φόρτου κειμένου ή από ένα πλαίσιο που δεν είναι οικείο στους μαθητές με βάση το πολιτισμικό τους υπόβαθρο.

Τα θέματα αξιολόγησης που έχουν σχεδιαστεί για το επίπεδο 1c θα πρέπει να ζητούν μόνο ένα βήμα ή μια λειτουργία. Ωστόσο, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ένα απλό βήμα ή πράξη δεν περιορίζεται σε ένα αριθμητικό βήμα. Το βήμα αυτό μπορεί να αποδεικνύεται με την επιλογή ή τον εντοπισμό κάποιων πληροφοριών. Τόσο ο μαθηματικός συλλογισμός όσο και όλες οι διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων θα πρέπει να χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση των ικανοτήτων μαθηματικού εγγραμματισμού των μαθητών στα επίπεδα 1b και 1c.

Πίνακας 3. Αναμενόμενες ενέργειες των μαθητών για τον μαθηματικό συλλογισμό και κάθε μια από τις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος

Μαθηματικός Συλλογισμός
** Να εξάγουν ένα απλό συμπέρασμα.
** Να επιλέγουν μια κατάλληλη αιτιολόγηση.
** Να εξηγούν γιατί ένα μαθηματικό αποτέλεσμα ή συμπέρασμα έχει ή δεν έχει νόημα στο πλαίσιο ενός προβλήματος.
Να αναπαριστούν ένα πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο, συμπεριλαμβανομένης της οργάνωσής του σύμφωνα με τις μαθηματικές έννοιες και την πραγματοποίηση κατάλληλων παραδοχών
Να αξιοποιούν ορισμούς, κανόνες και τυπικά συστήματα, καθώς και αλγόριθμους και υπολογιστική σκέψη.
Να εξηγούν και να τεκμηριώνουν την επιλογή ή τη διαμόρφωση μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης μιας κατάστασης του πραγματικού κόσμου.
Να εξηγούν και να αιτιολογούν τις διαδικασίες και τις διεργασίες ή τις προσομοιώσεις που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό ενός μαθηματικού αποτελέσματος ή μιας λύσης.
Να εντοπίζουν τα όρια του μοντέλου που χρησιμοποιείται για την επίλυση ενός προβλήματος
Να κατανοούν ορισμούς, κανόνες και τυπικά συστήματα, καθώς και τη χρήση αλγορίθμων και υπολογιστικών συλλογισμών.
Να αιτιολογούν την εντοπισμένη ή επινοηθείσα αναπαράσταση μιας πραγματικής κατάστασης
Να παρέχουν αιτιολόγηση των διεργασιών και των διαδικασιών που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό ενός μαθηματικού αποτελέσματος ή μιας λύσης
Να αναστοχάζονται μαθηματικά επιχειρήματα, εξηγώντας και αιτιολογώντας το μαθηματικό αποτέλεσμα.
Να ασκούν κριτική των ορίων του μοντέλου που χρησιμοποιείται για την επίλυση ενός προβλήματος
Να ερμηνεύουν ένα μαθηματικό αποτέλεσμα στο πραγματικό πλαίσιο, προκειμένου να εξηγήσετε το νόημα των αποτελεσμάτων.
Να εξηγούν τις σχέσεις μεταξύ της γλώσσας ενός προβλήματος που σχετίζεται με το συγκεκριμένο πλαίσιο και της συμβολικής και τυπικής γλώσσας που απαιτείται για τη μαθηματική αναπαράστασή του.
Να αναστοχάζονται πάνω σε μαθηματικά επιχειρήματα, εξηγώντας και αιτιολογώντας το μαθηματικό αποτέλεσμα.
Να αναστοχάζονται σχετικά με τις μαθηματικές λύσεις και δημιουργία εξηγήσεων και επιχειρημάτων που υποστηρίζουν, να αντικρούουν ή να προσδιορίζουν μια μαθηματική λύση σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.
Να αναλύουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ ενός υπολογιστικού μοντέλου και του μαθηματικού προβλήματος που μοντελοποιεί.
Να εξηγούν πώς λειτουργεί ένας απλός αλγόριθμος και να εντοπίζουν και να διορθώνουν λάθη σε αλγόριθμους και προγράμματα.

Διατύπωση	Εφαρμογή	Ερμηνεία
** Επιλογή μιας μαθηματικής περιγραφής ή μιας αναπαράστασης που περιγράφει ένα πρόβλημα	** Εκτέλεση ενός απλού υπολογισμού	** Ερμηνεία ενός μαθηματικού αποτελέσματος πίσω στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου
** Προσδιορισμός των βασικών μεταβλητών ενός μοντέλου	** Επιλογή μιας κατάλληλης στρατηγικής από έναν κατάλογο	** Προσδιορισμός του κατά πόσο ένα μαθηματικό αποτέλεσμα ή συμπέρασμα έχει ή δεν έχει νόημα με βάση το πλαίσιο ενός προβλήματος
** Επιλογή μιας αναπαράστασης κατάλληλης για το πλαίσιο του προβλήματος	** Εφαρμογή δεδομένης στρατηγικής για τον προσδιορισμό μαθηματικής λύσης	** Προσδιορισμός των ορίων του μοντέλου που χρησιμοποιείται για την επίλυση ενός προβλήματος
Ανάγνωση, αποκωδικοποίηση και κατανόηση δηλώσεων, ερωτήσεων, εργασιών, αντικειμένων ή εικόνων για τη δημιουργία ενός μοντέλου της κατάστασης	** Κατασκευή μαθηματικών διαγραμμάτων, γραφικών παραστάσεων, κατασκευών ή υπολογιστικών αντικειμένων	Χρήση μαθηματικών εργαλείων ή προσομοιώσεων στον υπολογιστή για την εξακρίβωση της λογικότητας μιας μαθηματικής λύσης και τυχόν ορίων και περιορισμών της λύσης αυτής, δεδομένου του πλαισίου του προβλήματος
Αναγνώριση μαθηματικής δομής (συμπεριλαμβανομένων κανονικότητας, σχέσεων και μοτίβων) σε προβλήματα ή καταστάσεις .	Κατανόηση και χρήση δομών που βασίζονται σε ορισμούς, κανόνες και τυπικά συστήματα, συμπεριλαμβανομένων των οικείων αλγορίθμων.	Ερμηνεία μαθηματικών αποτελεσμάτων σε διάφορες μορφές σε σχέση με μια κατάσταση ή χρήση, να συγκρίνουν ή να αξιολογούν δύο ή περισσότερες αναπαραστάσεις σε σχέση με μια κατάσταση
Προσδιορισμός και περιγραφή των μαθηματικών πτυχών μιας πραγματικής κατάστασης προβλήματος, συμπεριλαμβανομένου του προσδιορισμού των σημαντικών μεταβλητών.	Ανάπτυξη μαθηματικών διαγραμμάτων, γραφικών παραστάσεων, κατασκευών ή υπολογιστικών αντικειμένων και εξαγωγή μαθηματικών πληροφοριών από αυτά	Χρήση της γνώσης του τρόπου με τον οποίο ο πραγματικός κόσμος επηρεάζει τα αποτελέσματα και τους υπολογισμούς μιας μαθηματικής διαδικασίας ή ενός μοντέλου, προκειμένου να κρίνουν με βάση το πλαίσιο τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να προσαρμοστούν ή να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα.
Απλοποίηση ή αποσύνθεση μιας κατάστασης ή ενός προβλήματος, ώστε να καταστεί προσιτό σε μαθηματική ανάλυση	Χειρισμός αριθμών, γραφικών και στατιστικών δεδομένων και πληροφοριών, αλγεβρικών εκφράσεων και εξισώσεων και γεωμετρικών αναπαραστάσεων	Κατασκευή, επεξηγήσεις και επιχειρηματολογία στο πλαίσιο του προβλήματος
Αναγνώριση πτυχών ενός προβλήματος που αντιστοιχούν σε γνωστά προβλήματα ή μαθηματικές έννοιες, γεγονότα ή διαδικασίες	Διατύπωση μιας λύσης, δείχνοντας ή/και συνοψίζοντας και παρουσιάζοντας ενδιάμεσα μαθηματικά αποτελέσματα	Αναγνώριση [επίδειξη, ερμηνεία, εξήγηση] της έκτασης και των ορίων των μαθηματικών εννοιών και των μαθηματικών λύσεων
Μετάφραση ενός προβλήματος σε μια τυπική μαθηματική αναπαράσταση ή αλγόριθμο	Χρήση μαθηματικών εργαλείων, συμπεριλαμβανομένης της τεχνολογίας, των προσομοιώσεων και της υπολογιστικής σκέψης, για να βοηθήσουν στην εξεύρεση ακριβών ή προσεγγιστικών λύσεων	Κατανόηση της σχέσης μεταξύ του πλαισίου του προβλήματος και της αναπαράστασης της μαθηματικής λύσης. Χρήση αυτής της κατανόησης για να βοηθήσει στην ερμηνεία της λύσης στο πλαίσιο και να εκτιμήσει τη σκοπιμότητα και τους πιθανούς περιορισμούς της λύσης
Χρήση μαθηματικών εργαλείων (με τη χρήση κατάλληλων μεταβλητών, συμβόλων, διαγραμμάτων) για την περιγραφή των μαθηματικών δομών ή/και σχέσεων σε ένα πρόβλημα	Κατανόηση, συσχέτιση και χρήση μιας ποικιλίας αναπαραστάσεων κατά την αλληλεπίδραση με ένα πρόβλημα	
Εφαρμογή μαθηματικών εργαλείων και υπολογιστικού εργαλείου για την απεικόνιση μαθηματικών σχέσεων	Εναλλαγή μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων κατά τη διαδικασία εύρεσης λύσεων	
Προσδιορισμός των περιορισμών, των παραδοχών και των απλουστεύσεων σε ένα μαθηματικό μοντέλο	Χρήση μιας διαδικασίας πολλαπλών βημάτων που οδηγεί σε μια μαθηματική λύση, συμπέρασμα ή γενίκευση.	
	Χρήση της κατανόησης του πλαισίου για την καθοδήγηση ή την επιτάχυνση της διαδικασίας μαθηματικής επίλυσης, π.χ. εργασία σε ένα επίπεδο ακρίβειας κατάλληλο για το πλαίσιο	
	Γενίκευση με βάση τα αποτελέσματα της εφαρμογής μαθηματικών διαδικασιών για την εξεύρεση λύσεων	

Σημείωση: Ο πίνακας 3 αποτελεί αναδιατύπωση του σχήματος που χρησιμοποιήθηκε σε προηγούμενα πλαίσια για τη σύνδεση των μαθηματικών διαδικασιών με τις μαθηματικές ικανότητες. Όλα τα παραδείγματα και οι απεικονίσεις του εν λόγω σχήματος περιλαμβάνονται σε αυτή την αναδιατύπωση

Αξιολόγηση των μαθηματικών μέσω υπολογιστή

Ο κύριος τρόπος διεξαγωγής του PISA 2022 θα είναι η αξιολόγηση των μαθηματικών μέσω υπολογιστή (CBAM). Η μετάβαση έχει προβλεφθεί με τη μετάβαση τόσο της μελέτης του 2015 όσο και της μελέτης του 2018 στην παράδοση μέσω υπολογιστή. Προκειμένου να διατηρηθούν οι τάσεις σε όλες τις μελέτες, τόσο οι αξιολογήσεις του 2015 όσο και του 2018 ήταν ουδέτερες ως προς τον υπολογιστή, παρά τη χρήση τρόπου παράδοσης μέσω υπολογιστή. Η μετάβαση σε πλήρη CBAM το 2022 παρέχει μια σειρά ευκαιριών για την ανάπτυξη της αξιολόγησης του μαθηματικού εγγραμματισμού ώστε να ευθυγραμμιστεί καλύτερα με την εξελισσόμενη φύση των μαθηματικών στον σύγχρονο κόσμο, διασφαλίζοντας παράλληλα τις τάσεις επιστροφής σε σχέση με τους προηγούμενους κύκλους. Αυτές οι ευκαιρίες περιλαμβάνουν νέες μορφές αντικειμένων (π.χ. drag and drop)- παρουσίαση στους μαθητές δεδομένων του πραγματικού κόσμου (όπως μεγάλα, ταξινομήσιμα σύνολα δεδομένων)- δημιουργία μαθηματικών μοντέλων ή προσομοιώσεων που οι μαθητές μπορούν να εξερευνήσουν αλλάζοντας τις τιμές των μεταβλητών- προσαρμογή καμπυλών και χρήση της καμπύλης καλύτερης προσαρμογής για την πραγματοποίηση προβλέψεων. Εκτός από ένα ευρύτερο φάσμα τύπων ερωτήσεων και μαθηματικών ευκαιριών που παρέχει το CBAM, επιτρέπει επίσης την προσαρμοστική αξιολόγηση.

Η δυνατότητα προσαρμοστικής αξιολόγησης του CBAM, η οποία εφαρμόστηκε προηγουμένως στην αξιολόγηση της ανάγνωσης του PISA, παρέχει τη δυνατότητα καλύτερης περιγραφής του τι είναι αυτό που μπορούν να κάνουν οι μαθητές και στα δύο άκρα του φάσματος επιδόσεων. Παρέχοντας στους μαθητές όλο και πιο εξατομικευμένους συνδυασμούς ερωτήσεων αξιολόγησης ανάλογα με τις απαντήσεις και τις βαθμολογίες τους στις αρχικές ερωτήσεις αξιολόγησης στις οποίες ανταποκρίθηκαν, παράγονται όλο και πιο λεπτομερείς πληροφορίες σχετικά με τα χαρακτηριστικά των επιδόσεων των μαθητών και στα δύο άκρα της κλίμακας επιδόσεων.

Η χρήση των βελτιώσεων που προσφέρει η τεχνολογία των υπολογιστών οδηγεί σε θέματα αξιολόγησης που είναι πιο ελκυστικά για τους μαθητές, πιο οπτικά ελκυστικά και πιο εύκολα κατανοητά. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να παρουσιάσουν ένα κινούμενο ερέθισμα, αναπαραστάσεις τρισδιάστατων αντικειμένων που μπορούν να περιστραφούν ή πιο ευέλικτη πρόσβαση σε σχετικές πληροφορίες. Οι νέες μορφές ερωτήσεων αξιολόγησης, όπως αυτές που ζητούν από τους μαθητές να "σύρουν και να αποθέσουν" πληροφορίες ή να χρησιμοποιήσουν "καυτά σημεία" σε μια εικόνα, έχουν σχεδιαστεί για να εμπλέκουν τους μαθητές, να επιτρέπουν ένα ευρύτερο φάσμα τύπων απαντήσεων και να δίνουν μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα του μαθηματικού εγγραμματισμού. Μια βασική πρόκληση είναι να διασφαλιστεί ότι αυτά τα θέματα θα συνεχίσουν να αξιολογούν τον μαθηματικό εγγραμματισμό και ότι η παρεμβολή από άσχετες με τον τομέα διαστάσεις διατηρείται στο ελάχιστο.

Οι έρευνες δείχνουν ότι οι μαθηματικές απαιτήσεις της εργασίας εμφανίζονται όλο και περισσότερο με την παρουσία ηλεκτρονικής τεχνολογίας, έτσι ώστε ο μαθηματικός εγγραμματισμός και η χρήση του υπολογιστή να συγχωνεύονται (Hoyles et al., 2002[35]). Για τους εργαζόμενους σε όλα τα επίπεδα του εργασιακού χώρου, υπάρχει πλέον αλληλεξάρτηση μεταξύ του μαθηματικού εγγραμματισμού και της χρήσης της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Μια βασική πρόκληση είναι η διάκριση των μαθηματικών απαιτήσεων μιας ερώτησης αξιολόγησης που βασίζεται σε υπολογιστή στο PISA από απαιτήσεις που δεν σχετίζονται με τη μαθηματική επάρκεια, όπως οι απαιτήσεις της τεχνολογίας πληροφοριών και επικοινωνιών (ΤΠΕ) του αντικείμενου και η μορφή παρουσίασης. Η επίλυση των θεμάτων του PISA σε υπολογιστή και όχι σε χαρτί μεταφέρει το PISA στην πραγματικότητα και τις απαιτήσεις του 21^{ου} αιώνα.

Οι ερωτήσεις που φαίνονται κατάλληλες για την αξιολόγηση των μαθηματικών μέσω υπολογιστή και την εξελισσόμενη φύση του μαθηματικού εγγραμματισμού περιλαμβάνουν:

- Προσομοίωση στην οποία έχει δημιουργηθεί ένα μαθηματικό μοντέλο και οι μαθητές μπορούν να αλλάξουν τις τιμές των μεταβλητών για να

διερευνήσουν την επίδραση των μεταβλητών για τη δημιουργία "μιας βέλτιστης λύσης".

- Προσαρμογή μιας καμπύλης (επιλέγοντας μια καμπύλη από ένα περιορισμένο σύνολο παρεχόμενων καμπυλών) σε ένα σύνολο δεδομένων ή μια γεωμετρική εικόνα για τον προσδιορισμό της "καλύτερης προσαρμογής" και χρήση της προκύπτουσας καμπύλης καλύτερης προσαρμογής για τον προσδιορισμό της απάντησης σε μια ερώτηση σχετικά με την κατάσταση.
- Καταστάσεις προϋπολογισμού (π.χ. ηλεκτρονικό κατάστημα) στις οποίες ο μαθητής πρέπει να επιλέξει συνδυασμούς προϊόντων για την επίτευξη μιας σειράς στόχων εντός ενός συγκεκριμένου προϋπολογισμού.
- Προσομοίωση αγοράς κατά την οποία ο μαθητής επιλέγει μεταξύ διαφορετικών επιλογών αποπληρωμής δανείων και συνεργατών για να αγοράσει ένα αντικείμενο χρησιμοποιώντας ένα δάνειο και τηρώντας έναν προϋπολογισμό. Η πρόκληση στο πρόβλημα είναι να κατανοήσουμε πώς αλληλεπιδρούν οι μεταβλητές.
- Προβλήματα που περιλαμβάνουν οπτική κωδικοποίηση για την επίτευξη μιας δεδομένης ακολουθίας ενεργειών.

Παρά τις ευκαιρίες που παρουσιάζει η αξιολόγηση των μαθηματικών μέσω υπολογιστή (που περιγράφονται παραπάνω), είναι σημαντικό η αξιολόγηση των μαθηματικών μέσω υπολογιστή να παραμείνει εστιασμένη στην αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματισμού και να μην μετατοπιστεί στην αξιολόγηση των δεξιοτήτων ΤΠΕ. Ομοίως, είναι σημαντικό οι προσομοιώσεις και άλλες ερωτήσεις που υπαινίσσονται παραπάνω να μην γίνουν τόσο "θορυβώδεις" ώστε να χαθούν οι διαδικασίες μαθηματικού συλλογισμού και επίλυσης προβλημάτων.

Το CBAM πρέπει επίσης να διατηρεί ορισμένα από τα χαρακτηριστικά της έντυπης έκδοσης, όπως για παράδειγμα τη δυνατότητα επανεξέτασης των θεμάτων που έχουν ήδη δοκιμαστεί - αν και στο πλαίσιο της προσαρμοστικής εξέτασης αυτό θα περιορίζεται αναγκαστικά στην ενότητα στην οποία εργάζεται ο μαθητής.

Σχεδιασμός των μαθηματικών του PISA 2022

Για την αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματισμού στο PISA 2022 χρησιμοποιούνται τρεις τύποι αντικειμένων: ερωτήσεις ανοιχτής απάντησης, ερωτήσεις σύντομης απάντησης (κλειστής μορφής) και ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

Οι ερωτήσεις ανοιχτής απάντησης απαιτούν μια κάπως εκτεταμένη γραπτή απάντηση από τον μαθητή. Τέτοια θέματα μπορεί επίσης να ζητούν από τον μαθητή να δείξει τα βήματα που ακολουθήθηκαν ή να εξηγήσει πώς κατέληξε στην απάντηση. Αυτά τα στοιχεία απαιτούν εκπαιδευμένους εμπειρογνώμονες να κωδικοποιούν χειροκίνητα τις απαντήσεις των μαθητών. Για να διευκολυνθεί η δυνατότητα προσαρμοστικής αξιολόγησης του CBAM, θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των αντικειμένων που βασίζονται σε εκπαιδευμένους εμπειρογνώμονες για την κωδικοποίηση των απαντήσεων των μαθητών.

Οι ερωτήσεις σύντομης απάντησης (κλειστής μορφής) παρέχουν ένα πιο δομημένο πλαίσιο για την παρουσίαση λύσεων προβλήματος και παράγουν μια απάντηση του μαθητή που μπορεί εύκολα να κριθεί ως σωστή ή λανθασμένη. Συχνά οι απαντήσεις των μαθητών σε ερωτήσεις αυτού του τύπου μπορούν να κωδικοποιηθούν αυτόματα. Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες κλειστές ερωτήσεις κατασκευασμένων/δομημένης απαντήσεων είναι απλοί αριθμοί.

Οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής απαιτούν την επιλογή μιας ή περισσότερων απαντήσεων από έναν αριθμό επιλογών απάντησης. Οι απαντήσεις σε αυτές τις ερωτήσεις μπορούν συνήθως να υποβληθούν σε αυτόματη επεξεργασία. Για την κατασκευή των εργαλείων της έρευνας χρησιμοποιείται περίπου ίσος αριθμός από κάθε έναν από αυτούς τους τύπους μορφής ερωτήσεων.

Η έρευνα PISA για τα μαθηματικά αποτελείται από μονάδες αξιολόγησης που περιλαμβάνουν γραπτό υλικό και άλλες πληροφορίες, όπως πίνακες,

διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις ή διαγράμματα, καθώς και ένα ή περισσότερα στοιχεία που συνδέονται με αυτό το κοινό υλικό. Αυτή η μορφή δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να εμπλακούν σε ένα πλαίσιο ή πρόβλημα απαντώντας σε μια σειρά από συναφή στοιχεία.

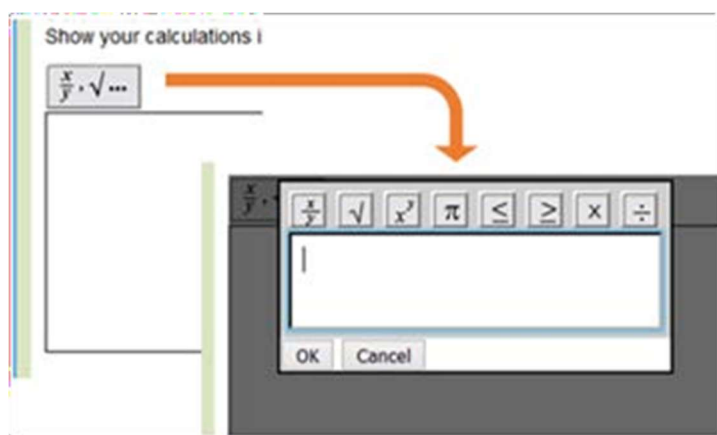
Τα θέματα που επιλέγονται για να συμπεριληφθούν στην έρευνα PISA αντιπροσωπεύουν ένα ευρύ φάσμα δυσκολιών, ώστε να ανταποκρίνονται στο ευρύ φάσμα ικανοτήτων των μαθητών που συμμετέχουν στην αξιολόγηση. Επιπλέον, όλες οι κύριες κατηγορίες της αξιολόγησης (οι κατηγορίες περιεχομένου, οι κατηγορίες μαθηματικού συλλογισμού και διαδικασίας επίλυσης προβλήματος και οι κατηγορίες διαφορετικών πλαισίων και δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα) αντιπροσωπεύονται, στο μέτρο του δυνατού, με αντικείμενα μεγάλου εύρους δυσκολιών. Οι δυσκολίες των αντικειμένων καθορίζονται ως μία από ορισμένες ιδιότητες μέτρησης σε μια εκτεταμένη δοκιμή πεδίου πριν από την επιλογή των αντικειμένων για την κύρια έρευνα PISA. Τα αντικείμενα επιλέγονται για να συμπεριληφθούν στα εργαλεία της έρευνας PISA με βάση την προσαρμογή τους στις κατηγορίες του πλαισίου και τις ιδιότητες μέτρησης.

Επιπλέον, το επίπεδο ανάγνωσης που απαιτείται για την επιτυχή ενασχόληση με ένα αντικείμενο εξετάζεται πολύ προσεκτικά κατά την ανάπτυξη και την επιλογή του αντικειμένου. Ένας στόχος κατά την ανάπτυξη των θεμάτων αξιολόγησης είναι να είναι η διατύπωση των θεμάτων όσο το δυνατόν πιο απλή και άμεση. Λαμβάνεται επίσης μέριμνα για την αποφυγή πλαισίων στοιχείων που θα δημιουργούσαν πολιτισμική προκατάληψη, και όλες οι επιλογές ελέγχονται με τις εθνικές ομάδες. Η μετάφραση των στοιχείων σε πολλές γλώσσες γίνεται πολύ προσεκτικά, με εκτεταμένη αντίστροφη μετάφραση και άλλα πρωτόκολλα.

Το PISA 2022 θα περιλαμβάνει ένα εργαλείο που θα επιτρέπει στους μαθητές να δίνουν δακτυλογραφημένες απαντήσεις κατασκευασμένων απαντήσεων και να δείχνουν την εργασία τους, όπως απαιτείται για τον μαθηματικό εγγραμματισμό. Το εργαλείο επιτρέπει στους μαθητές να εισάγουν τόσο κείμενο όσο και αριθμούς. Κάνοντας κλικ στο κατάλληλο κουμπί, οι μαθητές μπορούν να εισάγουν κλάσμα, τετραγωνική ρίζα ή εκθέτη. Πρόσθετα

σύμβολα όπως το π και τα σύμβολα μεγαλύτερου/μικρότερου από το είναι διαθέσιμα, καθώς και τελεστές όπως τα σύμβολα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στην Εικόνα 3 παρακάτω.

Σχήμα 2.3. Παράδειγμα του εργαλείου επεξεργασίας PISA 2022



Η σουίτα των εργαλείων που έχουν στη διάθεσή τους οι μαθητές αναμένεται επίσης να περιλαμβάνει μια βασική επιστημονική αριθμομηχανή. Οι πράξεις που πρέπει να περιλαμβάνονται είναι η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση, καθώς και η τετραγωνική ρίζα, το π , η παρένθεση, ο εκθέτης, το τετράγωνο, το κλάσμα (y/x), το αντίστροφο ($1/x$) και η αριθμομηχανή θα προγραμματιστεί να τηρεί την τυπική σειρά πράξεων.

Οι μαθητές που συμμετέχουν στην αξιολόγηση σε χαρτί μπορούν να έχουν πρόσβαση σε αριθμομηχανή χειρός, όπως έχει εγκριθεί για χρήση από 15χρονους μαθητές στα αντίστοιχα σχολικά συστήματα.

Βαθμολόγηση των ερωτήσεων αξιολόγησης

Αν και η πλειονότητα των ερωτήσεων αξιολόγησης βαθμολογείται διχοτομικά (δηλαδή, οι απαντήσεις βαθμολογούνται είτε με πίστωση είτε χωρίς πίστωση), οι ερωτήσεις ανοιχτής απάντησης μπορεί μερικές φορές να περιλαμβάνουν μερική βαθμολόγηση, η οποία επιτρέπει στις απαντήσεις να βαθμολογούνται ανάλογα με τους διαφορετικούς βαθμούς "ορθότητας" των

απαντήσεων και ή με το βαθμό στον οποίο ένα αντικείμενο απασχόλησε ή όχι. Προβλέπεται ότι η ανάγκη για μερική βαθμολόγηση θα είναι ιδιαίτερα σημαντική για τα θέματα μαθηματικού συλλογισμού, τα οποία σπάνια περιλαμβάνουν την παραγωγή απαντήσεων με έναν μόνο αριθμό, αλλά μάλλον απαντήσεις με ένα ή περισσότερα στοιχεία.

Αναφορά επιπέδων μαθηματικής επάρκειας

Τα αποτελέσματα της έρευνας PISA για τα μαθηματικά αναφέρονται με διάφορους τρόπους. Λαμβάνονται εκτιμήσεις της συνολικής μαθηματικής επάρκειας για τους μαθητές του δείγματος σε κάθε συμμετέχουσα χώρα και ορίζονται ορισμένα επίπεδα μαθηματικής επάρκειας. Αναπτύσσονται επίσης περιγραφές του βαθμού του μαθηματικού εγγραμματισμού που χαρακτηρίζει τους μαθητές σε κάθε επίπεδο. Για το PISA 2022, τα έξι επίπεδα μαθηματικής επάρκειας που αναφέρθηκαν για τα συνολικά μαθηματικά του PISA σε προηγούμενους κύκλους θα επεκταθούν ως εξής: Το επίπεδο 1 θα μετονομαστεί σε επίπεδο 1a και ο πίνακας που περιγράφει τις ικανότητες θα επεκταθεί ώστε να συμπεριλάβει τα επίπεδα 1b και 1c. Αυτά τα πρόσθετα επίπεδα προστέθηκαν για να παρέχουν μεγαλύτερη λεπτομέρεια στην αναφορά των μαθητών με επιδόσεις στο κατώτερο άκρο της κλίμακας επάρκειας. Στον πίνακα 2.4 παρουσιάζονται συνοπτικές περιγραφές των οκτώ επιπέδων επάρκειας στον μαθηματικό εγγραμματισμό για τη συνολική κλίμακα μαθηματικών του PISA το 2022.

Πίνακας 4. Συνοπτικές περιγραφές των οκτώ επιπέδων επάρκειας μαθηματικού εγγραμματισμού

Επίπεδο	Τι μπορούν να κάνουν οι μαθητές
6	Στο Επίπεδο 6, οι μαθητές/τριες μπορούν να επιλύσουν αφηρημένα προβλήματα και να επιδείξουν δημιουργικότητα και ευέλικτη σκέψη για να αναπτύξουν λύσεις. Για παράδειγμα, μπορούν να αναγνωρίσουν πότε μια διαδικασία, που δεν είναι εξειδικευμένη σε ένα έργο, μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα μη τυποποιημένο πλαίσιο, ή πότε η επίδειξη μιας βαθύτερης κατανόησης μιας μαθηματικής έννοιας είναι απαραίτητη ως μέρος μιας αιτιολόγησης. Μπορούν να συνδέσουν διαφορετικές πηγές πληροφοριών και αναπαραστάσεις, συμπεριλαμβανομένης της αποτελεσματικής χρήσης προσομοιώσεων ή υπολογιστικών φύλλων, ως μέρος της λύσης τους. Οι μαθητές/τριες σε αυτό το επίπεδο είναι ικανοί για κριτική σκέψη και έχουν γνώση συμβολικών και τυπικών μαθηματικών πράξεων και σχέσεων που χρησιμοποιούν για να επικοινωνήσουν με σαφήνεια τον συλλογισμό τους. Μπορούν να αναστοχαστούν την καταλληλότητα των ενεργειών τους σε σχέση με τη λύση τους και την αρχική κατάσταση.
5	Στο Επίπεδο 5, οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν και να εργαστούν με μοντέλα για σύνθετες καταστάσεις, εντοπίζοντας ή επιβάλλοντας περιορισμούς και καθορίζοντας υποθέσεις. Μπορούν να εφαρμόσουν συστηματικές, καλά σχεδιασμένες στρατηγικές επίλυσης προβλήματος για την αντιμετώπιση πιο απαιτητικών εργασιών, όπως η απόφαση για τον τρόπο ανάπτυξης ενός πειράματος, ο σχεδιασμός μιας βέλτιστης διαδικασίας ή η εργασία με πιο σύνθετες απεικονίσεις που δεν δίνονται στο έργο. Οι μαθητές επιδεικνύουν αυξημένη ικανότητα επίλυσης προβλημάτων των οποίων οι λύσεις συχνά απαιτούν την ενσωμάτωση μαθηματικών γνώσεων που δεν αναφέρονται ρητά στο έργο. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο αναστοχάζονται πάνω στην εργασία τους και εξετάζουν τα μαθηματικά αποτελέσματα σε σχέση με το πραγματικό περιβάλλον.
4	Στο Επίπεδο 4, οι μαθητές μπορούν να εργαστούν αποτελεσματικά με σαφή μοντέλα για σύνθετες συγκεκριμένες καταστάσεις, που μερικές φορές περιλαμβάνουν δύο μεταβλητές, καθώς και να επιδείξουν την ικανότητα να εργάζονται με μη προκαθορισμένα μοντέλα που παράγουν χρησιμοποιώντας μια πιο εκλεπτυσμένη υπολογιστική σκέψη. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο αρχίζουν να ασχολούνται με πτυχές της κριτικής σκέψης, όπως η αξιολόγηση της ευλογοφάνειας ενός αποτελέσματος κάνοντας ποιοτικές κρίσεις όταν οι υπολογισμοί δεν είναι δυνατοί από τις δεδομένες πληροφορίες. Μπορούν να επιλέξουν και να ενσωματώσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις πληροφοριών, συμπεριλαμβανομένων συμβολικών ή γραφικών, συνδέοντάς τις απευθείας με πτυχές καταστάσεων του πραγματικού κόσμου. Σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές μπορούν επίσης να κατασκευάσουν και να επικοινωνήσουν εξηγήσεις και επιχειρήματα με βάση τις ερμηνείες, τον συλλογισμό και τη μεθοδολογία τους
3	Στο Επίπεδο 3, οι μαθητές μπορούν να επινοήσουν στρατηγικές επίλυσης, συμπεριλαμβανομένων στρατηγικών που απαιτούν διαδοχική λήψη αποφάσεων ή/και ευελιξία στην κατανόηση οικείων εννοιών. Σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές/τριες αρχίζουν να χρησιμοποιούν δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης για να αναπτύξουν τη στρατηγική λύσης τους. Είναι σε θέση να επιλύουν έργα που απαιτούν την εκτέλεση αρκετών διαφορετικών αλλά γνωστών υπολογισμών που δεν ορίζονται όλοι σαφώς στη διατύπωση του προβλήματος. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν χωρική οπτικοποίηση ως μέρος μιας στρατηγικής λύσης ή να καθορίσουν πώς να χρησιμοποιήσουν μια προσομοίωση για να συλλέξουν δεδομένα κατάλληλα για την εργασία. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο μπορούν να ερμηνεύσουν και να χρησιμοποιήσουν αναπαραστάσεις που βασίζονται σε διαφορετικές πηγές πληροφοριών και να κάνουν συλλογισμούς απευθείας από αυτές,

	συμπεριλαμβανομένης της χρήσης ενός πίνακα διπλής εισόδου. Συνήθως δείχνουν κάποια ικανότητα να χειρίζονται ποσοστά, κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς, και να εργάζονται με αναλογικές σχέσεις.
2	Στο Επίπεδο 2, οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν καταστάσεις όπου χρειάζεται να σχεδιάσουν απλές στρατηγικές για να λύσουν ένα πρόβλημα, συμπεριλαμβανομένης της εκτέλεσης απλών προσομοιώσεων που περιλαμβάνουν μία μεταβλητή. Μπορούν να εξαγάγουν σχετικές πληροφορίες από μία ή περισσότερες πηγές που χρησιμοποιούν ελαφρώς πιο σύνθετους τρόπους αναπαράστασης, όπως πίνακες διπλής εισόδου, γραφήματα ή δισδιάστατες αναπαραστάσεις τρισδιάστατων αντικειμένων. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο επιδεικνύουν βασική κατανόηση των συναρτησιακών σχέσεων και μπορούν να λύσουν προβλήματα που αφορούν απλές αναλογίες. Είναι ικανοί να κάνουν κυριολεκτικές ερμηνείες των αποτελεσμάτων.
1a	Στο Επίπεδο 1α, οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν σε ερωτήσεις που αφορούν απλά πλαίσια όπου όλες οι απαραίτητες πληροφορίες είναι παρούσες και οι ερωτήσεις είναι σαφώς καθορισμένες. Οι πληροφορίες μπορούν να παρουσιαστούν σε μια ποικιλία απλών μορφών και οι μαθητές μπορεί να χρειαστεί να εργαστούν με δύο πηγές ταυτόχρονα για να εξαγάγουν σχετικές πληροφορίες. Είναι σε θέση να εκτελούν απλές, συνήθεις διαδικασίες σύμφωνα με άμεσες οδηγίες σε σαφείς καταστάσεις, οι οποίες μπορεί να απαιτούν πολλαπλές επαναλήψεις μιας συνήθους διαδικασίας για την επίλυση ενός προβλήματος. Μπορούν να εκτελούν ενέργειες που είναι προφανείς ή που απαιτούν ελάχιστη σύνθεση πληροφοριών, αλλά προκύπτουν σαφώς από τα δεδομένα ερεθίσματα. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο μπορούν να χρησιμοποιήσουν βασικούς αλγόριθμους, τύπους, διαδικασίες ή συμβάσεις για να λύσουν προβλήματα που συνήθως περιλαμβάνουν ακέραιους αριθμούς.
1b	Στο Επίπεδο 1β, οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν σε ερωτήσεις που αφορούν εύκολα κατανοητά πλαίσια όπου όλες οι απαραίτητες πληροφορίες δίνονται με σαφήνεια σε μια απλή αναπαράσταση (δηλαδή, σε μορφή πίνακα ή γραφήματος). Αν είναι απαραίτητο, αναγνωρίζουν τότε ορισμένες πληροφορίες είναι περιττές και μπορούν να αγνοηθούν σε σχέση με τη συγκεκριμένη ερώτηση. Είναι σε θέση να εκτελούν απλούς υπολογισμούς με ακέραιους αριθμούς, οι οποίοι προκύπτουν από σαφώς καθορισμένες οδηγίες, που αποτυπώνονται σε σύντομο και απλό κείμενο. Αυτού του επιπέδου είναι οι ερωτήσεις του θέματος «Ρόδα Λούνα Παρκ» της πλατφόρμας skills4life.
1c	Στο επίπεδο 1γ, οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν σε ερωτήσεις που αφορούν εύκολα κατανοητά πλαίσια, όπου όλες οι σχετικές πληροφορίες δίνονται με σαφήνεια σε απλή, οικεία μορφή (για παράδειγμα, ένας μικρός πίνακας ή μια εικόνα) και ορίζονται σε ένα πολύ σύντομο, συντακτικά απλό κείμενο. Είναι σε θέση να ακολουθήσουν μια σαφή οδηγία που περιγράφει ένα μόνο βήμα ή πράξη.

Εκτός από τη συνολική κλίμακα μαθηματικών, μετά τη δοκιμή πεδίου αναπτύσσονται πρόσθετες περιγραφόμενες κλίμακες επάρκειας, οι οποίες στη συνέχεια αναφέρονται. Αυτές οι πρόσθετες κλίμακες αφορούν τον μαθηματικό συλλογισμό και τις τρεις διαδικασίες επίλυσης μαθηματικού προβλήματος: διατύπωση καταστάσεων με μαθηματικό τρόπο, εφαρμογή και χρήση μαθηματικών εννοιών, γεγονότων και διαδικασιών και ερμηνεία, εφαρμογή και αξιολόγηση μαθηματικών αποτελεσμάτων.

Μαθηματικός εγγραμματισμός και ερωτηματολόγια υποβάθρου

Από τον πρώτο κύκλο του PISA, τα ερωτηματολόγια για το μαθητικό και το σχολικό πλαίσιο εξυπηρετούν δύο αλληλένδετους σκοπούς στην υπηρεσία του ευρύτερου στόχου της αξιολόγησης των εκπαιδευτικών συστημάτων: πρώτον, τα ερωτηματολόγια παρέχουν ένα πλαίσιο μέσω του οποίου μπορούν να ερμηνευθούν τα αποτελέσματα του PISA τόσο εντός όσο και μεταξύ των εκπαιδευτικών συστημάτων. Δεύτερον, τα ερωτηματολόγια αποσκοπούν στην αξιόπιστη και έγκυρη μέτρηση πρόσθετων εκπαιδευτικών δεικτών, οι οποίοι μπορούν να παρέχουν πληροφορίες για την πολιτική και την έρευνα από μόνοι τους.

Δεδομένου ότι ο μαθηματικός εγγραμματισμός είναι το κύριο γνωστικό αντικείμενο αξιολόγησης στην έρευνα του 2022, τα ερωτηματολόγια αναμένεται να παρέχουν όχι μόνο δεδομένα τάσεων για τις δομές που συνεχίζουν να αξιολογούνται, αλλά επιπλέον να παρέχουν πλούσιες πληροφορίες σχετικά με τις καινοτομίες που είναι εμφανείς στο πλαίσιο του μαθηματικού εγγραμματισμού του PISA 2022. Ειδικότερα, αναμένεται ότι ο μαθηματικός εγγραμματισμός θα κατέχει εξέχουσα θέση στην ανάλυση των συγκεκριμένων πλαισιακών δομών του τομέα, καθώς και σε ορισμένες από τις διάφορες κατηγορίες πολιτικής εστίασης που κυμαίνονται από μεταβλητές ατομικού επιπέδου, όπως τα δημογραφικά και κοινωνικά και συναισθηματικά χαρακτηριστικά, έως τις σχολικές πρακτικές, τις πολιτικές και τις υποδομές (OECD, 2018[36]).

Εντοπίστηκαν δύο ευρείς τομείς της στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά που τους προδιαθέτουν για παραγωγική ενασχόληση με τα μαθηματικά, οι οποίοι θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο ενδιαφέροντος ως συμπλήρωμα της αξιολόγησης των μαθηματικών του PISA 2012. Πρόκειται για το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά και την προθυμία τους να ασχοληθούν με αυτά. Αναμένεται ότι αυτά θα συνεχίσουν να αποτελούν το επίκεντρο των ερωτηματολογίων το 2022.

Το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά έχει στοιχεία που σχετίζονται με την παρούσα και τη μελλοντική δραστηριότητα. Οι σχετικές ερωτήσεις επικεντρώνονται στο ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά στο σχολείο, στο κατά πόσον τα θεωρούν χρήσιμα στην πραγματική ζωή, καθώς και στις προθέσεις τους να πραγματοποιήσουν περαιτέρω σπουδές στα μαθηματικά και να συμμετάσχουν σε επαγγέλματα προσανατολισμένα στα μαθηματικά. Υπάρχει διεθνής ανησυχία για τον τομέα αυτό, διότι σε πολλές συμμετέχουσες χώρες παρατηρείται μείωση του ποσοστού των μαθητών που επιλέγουν μελλοντικές σπουδές σχετικές με τα μαθηματικά, ενώ ταυτόχρονα υπάρχει αυξανόμενη ανάγκη για αποφοίτους από αυτούς τους τομείς.

Η προθυμία των μαθητών να ασχοληθούν με τα μαθηματικά αφορά τις στάσεις, τα συναισθήματα και τις πεποιθήσεις που σχετίζονται με τον εαυτό τους, οι οποίες προδιαθέτουν τους μαθητές να επωφεληθούν ή τους εμποδίζουν να επωφεληθούν από τον μαθηματικό εγγραμματισμό που έχουν επιτύχει. Οι μαθητές που απολαμβάνουν τη μαθηματική δραστηριότητα και αισθάνονται αυτοπεποίθηση να την αναλαμβάνουν είναι πιο πιθανό να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για να σκεφτούν τις καταστάσεις που συναντούν στις διάφορες πτυχές της ζωής τους, εντός και εκτός σχολείου. Οι δομές από την έρευνα PISA που σχετίζονται με αυτόν τον τομέα περιλαμβάνουν τα συναισθήματα της απόλαυσης, της αυτοπεποίθησης και του (ελλιπούς) άγχους για τα μαθηματικά, καθώς και τις αυτοσχετιζόμενες πεποιθήσεις της αυτοαντίληψης και της αυτοαποτελεσματικότητας. Μια ανάλυση της μετέπειτα προόδου των νεαρών Αυστραλών που σημείωσαν χαμηλή βαθμολογία στο PISA στην ηλικία των 15 ετών διαπίστωσε ότι εκείνοι που "αναγνωρίζουν την αξία των μαθηματικών για τη μελλοντική τους επιτυχία είναι πιο πιθανό να επιτύχουν αυτή την επιτυχία, και αυτό περιλαμβάνει την ικανοποίηση από πολλές πτυχές της προσωπικής τους ζωής, καθώς και από το μέλλον και τη σταδιοδρομία τους" (Hillman and Thomson, 2010, σ. 31[37]). Η μελέτη συνιστά ότι η εστίαση στις πρακτικές εφαρμογές των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση προοπτικών αυτών των μαθητών με χαμηλές επιδόσεις.

Οι καινοτομίες που είναι εμφανείς στο πλαίσιο του PISA 2022 για τα Μαθηματικά υποδεικνύουν τουλάχιστον τέσσερις τομείς στους οποίους τα ερωτηματολόγια μπορούν να παρέχουν πλούσια δεδομένα. Οι τομείς αυτοί είναι: **μαθηματικός συλλογισμός, υπολογιστική σκέψη** και ο ρόλος της τεχνολογίας τόσο στην άσκηση όσο και στη διδασκαλία των μαθηματικών, **οι τέσσερις κεντρικοί τομείς περιεχομένου και οι δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα στο πλαίσιο των μαθηματικών**.

Μαθηματικός συλλογισμός

Το Πλαίσιο των Μαθηματικών του PISA 2022 δίνει έμφαση στον μαθηματικό συλλογισμό, ο οποίος ενεργοποιείται από ορισμένες βασικές αντιλήψεις που διέπουν τα σχολικά μαθηματικά (κατανόηση της ποσότητας, των αριθμητικών συστημάτων και των αλγεβρικών ιδιοτήτων τους, εκτίμηση της δύναμης της αφαίρεσης και της συμβολικής αναπαράστασης, αντίληψη των μαθηματικών δομών και των κανονικοτήτων τους, αναγνώριση των λειτουργικών σχέσεων μεταξύ των μεγεθών, χρήση της μαθηματικής μοντελοποίησης ως φακού για τον πραγματικό κόσμο και κατανόηση της μεταβλητότητας ως καρδιά της στατιστικής).

Η εστίαση στον μαθηματικό συλλογισμό έχει επιπτώσεις στα ερωτηματολόγια υποβάθρου τα οποία θα πρέπει να παρέχουν μέτρα για την κατανόηση των ευκαιριών των μαθητών να μάθουν να συλλογίζονται μαθηματικά και να χρησιμοποιούν τις βασικές αντιλήψεις που διέπουν τα σχολικά μαθηματικά. Ειδικότερα, τα ερωτηματολόγια θα πρέπει να προσδιορίζουν τη συχνότητα με την οποία οι μαθητές, για παράδειγμα:

- εντοπίζουν, αναγνωρίζουν, οργανώνουν, συνδέουν και αναπαριστούν,
- κατασκευάζουν, αφηγούνται, αξιολογούν, συμπεραίνουν, δικαιολογούν, εξηγούν και υπερασπίζονται,
- ερμηνεύουν, κρίνουν, ασκούν κριτική, διαψεύδουν και προσδιορίζουν.

Εκτός από τον προσδιορισμό της συχνότητας των ευκαιριών (για να μάθουν) να συλλογίζονται, τα ερωτηματολόγια θα πρέπει να εξετάζουν τις μορφές αυτών των ευκαιριών (προφορικές ή γραπτές).

Τέλος, όσον αφορά τον μαθηματικό συλλογισμό, τα ερωτηματολόγια θα πρέπει να δίνουν μια αίσθηση της προθυμίας των μαθητών να επιμείνουν σε εργασίες που περιλαμβάνουν μαθηματικό συλλογισμό.

Στην περίπτωση των εκπαιδευτικών και της διδασκαλίας υπάρχει η ανάγκη να κατανοήσουμε καλύτερα πώς βλέπουν το ρόλο του μαθηματικού συλλογισμού γενικά και ειδικότερα στις πρακτικές διδασκαλίας και αξιολόγησής τους.

Υπολογιστική σκέψη

Οι πτυχές της υπολογιστικής σκέψης αποτελούν μια ταχέως εξελισσόμενη και αυξανόμενη διάσταση τόσο των μαθηματικών όσο και του μαθηματικού εγγραμματισμού. Το πλαίσιο του μαθηματικού εγγραμματισμού PISA 2022 δείχνει πώς η υπολογιστική σκέψη αποτελεί μέρος της μαθηματικής πράξης και πώς επηρεάζει τη μαθηματική πράξη. Οι ενότητες αξιών και πεποιθήσεων σχετικά με τη μάθηση και την ανοιχτή σκέψη των ερωτηματολογίων ιστορικού μπορούν να διερευνήσουν την εμπειρία των μαθητών σχετικά με το ρόλο της υπολογιστικής σκέψης στην άσκηση των μαθηματικών.

Το πλαίσιο μαθηματικού εγγραμματισμού PISA 2022 εφιστά την προσοχή στους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους η τεχνολογία αλλάζει τον κόσμο στον οποίο ζούμε και αλλάζει το τι σημαίνει να ασχολείσαι με τα μαθηματικά. Τα βασικά ερωτήματα για τα ερωτηματολόγια υποβάθρου περιλαμβάνουν την ανάπτυξη μιας βαθιάς κατανόησης πρώτον, του τρόπου με τον οποίο αλλάζουν οι εμπειρίες των μαθητών για τα μαθηματικά και την ενασχόληση με τα μαθηματικά (αν αλλάζουν καθόλου) και δεύτερον, του τρόπου με τον οποίο εξελίσσεται η παιδαγωγική της τάξης λόγω του αντίκτυπου που έχει η τεχνολογία στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές ασχολούνται με τα μαθηματικά και τα μαθηματικά αντικείμενα και στο τι σημαίνει να ασχολείσαι με τα μαθηματικά. Στην περίπτωση των μαθητών, έχει ενδιαφέρον να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο η τεχνολογία επηρεάζει την επίδοση των μαθητών, η οποία θα μπορούσε να

διερευνηθεί στην ενότητα επίδοσης εργασιών του πλαισίου ερωτηματολογίου. Τα παιδαγωγικά ζητήματα θα μπορούσαν να διερευνηθούν τόσο στην ενότητα του χρόνου μάθησης όσο και στην ενότητα του προγράμματος σπουδών και των πρακτικών διδασκαλίας.

Η εστίαση στην υπολογιστική σκέψη και ο ρόλος της τεχνολογίας τόσο στην άσκηση όσο και στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει επιπτώσεις στα ερωτηματολόγια, τα οποία θα πρέπει να παρέχουν μέτρα για την καλύτερη κατανόηση των ευκαιριών των μαθητών να μάθουν από αυτή την άποψη. Ειδικότερα, τα ερωτηματολόγια θα πρέπει να προσδιορίζουν τη συχνότητα με την οποία οι μαθητές, για παράδειγμα:

- να σχεδιάζουν ή να εργάζονται με προσομοιώσεις ή μοντέλα υπολογιστών,
- κώδικα ή προγράμματος τόσο μέσα στην τάξη των μαθηματικών όσο και έξω από αυτήν,
- εκτίθενται σε Μαθηματικά Συστήματα Υπολογιστών (ΜΣΥ) (συμπεριλαμβανομένου λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, λογιστικών φύλλων, λογισμικού προγραμματισμού (π.χ. Logo και Scratch), αριθμομηχανών, παιχνιδιών κ.λπ.)

Τέσσερις κεντρικοί τομείς περιεχομένου

Αναγνωρίζοντας τον μεταβαλλόμενο κόσμο, το πλαίσιο του PISA 2022 για τα Μαθηματικά πρότεινε να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση σε τέσσερις τομείς περιεχομένου εντός του υφιστάμενου πλαισίου περιεχομένου. Αυτοί οι τομείς περιεχομένου είναι οι εξής: φαινόμενα ανάπτυξης (στο πλαίσιο της αλλαγής και των σχέσεων), γεωμετρική προσέγγιση (στο πλαίσιο του χώρου και του σχήματος), προσομοιώσεις στον υπολογιστή (στο πλαίσιο της ποσότητας) και λήψη αποφάσεων υπό όρους (στο πλαίσιο της αβεβαιότητας και των δεδομένων). Η εστίαση σε αυτούς τους τομείς περιεχομένου έχει επιπτώσεις στα ερωτηματολόγια, τα οποία θα πρέπει να παρέχουν μέτρα για την καλύτερη κατανόηση των ευκαιριών μάθησης των μαθητών σε αυτό το θέμα. Ειδικότερα, τα ερωτηματολόγια θα πρέπει να προσδιορίζουν τη συχνότητα με την οποία οι μαθητές εκτίθενται σε αυτά τα περιεχόμενα και

τις διάφορες μορφές που λαμβάνουν οι ευκαιρίες αυτές.

Δεξιότητες του 21ου αιώνα στο πλαίσιο των μαθηματικών

Το πλαίσιο του μαθηματικού εγγραμματισμού του PISA 2022 εισάγει ένα συγκεκριμένο σύνολο δεξιοτήτων του 21ου αιώνα ως αποτέλεσμα των μαθηματικών και ως εστίαση στα μαθηματικά. Τα ερωτηματολόγια υποβάθρου θα μπορούσαν να εξετάσουν παραγωγικά αν τα μαθηματικά συμβάλλουν ή όχι στην ανάπτυξη αυτών των δεξιοτήτων και αν οι διδακτικές πρακτικές εστιάζουν σε αυτές. Ειδικότερα, η ενότητα του μαθησιακού χρόνου και του προγράμματος σπουδών θα μπορούσε να διερευνήσει κατά πόσον αυτές οι δεξιότητες εμφανίζονται ή όχι στο εφαρμοζόμενο πρόγραμμα σπουδών.

Τα αποτελέσματα της έρευνας του PISA 2022 θα παράσχουν σημαντικές πληροφορίες για τους υπεύθυνους χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής στις συμμετέχουσες χώρες σχετικά με τα αποτελέσματα της σχολικής εκπαίδευσης που σχετίζονται τόσο με τις επιδόσεις όσο και με τις στάσεις. Συνδυάζοντας τις πληροφορίες από την αξιολόγηση του μαθηματικού εγγραμματισμού του PISA και τις πληροφορίες της έρευνας σχετικά με τις στάσεις, τα συναισθήματα και τις πεποιθήσεις που προδιαθέτουν τους μαθητές να χρησιμοποιούν τον μαθηματικό τους εγγραμματισμό, καθώς και τον αντίκτυπο των τεσσάρων εξελίξεων που περιγράφονται παραπάνω, θα προκύψει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα.

Συμπέρασμα

Το πλαίσιο μαθηματικού εγγραμματισμού του PISA 2022, διατηρώντας τη συνοχή με τα προηγούμενα πλαίσια μαθηματικού εγγραμματισμού, αναγνωρίζει ότι ο κόσμος αλλάζει διαρκώς και μαζί με αυτόν η απαίτηση για μαθηματικά εγγράμματους πολίτες να σκέφτονται μαθηματικά και όχι να αναπαράγουν μαθηματικές τεχνικές ως ρουτίνες.

Ο στόχος του PISA όσον αφορά τον μαθηματικό εγγραμματισμό είναι να αναπτύξει δείκτες που να δείχνουν πόσο αποτελεσματικά οι χώρες προετοιμάζουν τους μαθητές να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή πτυχή της προσωπικής, πολιτικής και επαγγελματικής τους ζωής, ως δημιουργικοί, ενεργοί και σκεπτόμενοι πολίτες του 21^{ου} αιώνα. Για να επιτευχθεί αυτό, το PISA ανέπτυξε έναν ορισμό του μαθηματικού εγγραμματισμού και ένα πλαίσιο αξιολόγησης που αντικατοπτρίζει τα σημαντικά στοιχεία αυτού του ορισμού.

Τα θέματα αξιολόγησης των μαθηματικών που επιλέχθηκαν για να συμπεριληφθούν στο PISA 2022, με βάση αυτόν τον ορισμό και το πλαίσιο, έχουν ως στόχο να αντικατοπτρίζουν μια ισορροπία μεταξύ μαθηματικού συλλογισμού, διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων, μαθηματικού περιεχομένου και πλαισίων.

Ο σχεδιασμός της αξιολόγησης θα διασφαλίσει την έγκυρη μέτρηση των ικανοτήτων σε όλο το εύρος των επιδόσεων που εκτείνεται σε δύο επίπεδα κάτω από την προηγούμενη κλίμακα PISA, διατηρώντας παράλληλα την ποιότητα και το περιεχόμενο της αξιολόγησης.

Η αξιολόγηση των μαθηματικών μέσω υπολογιστή που θα χρησιμοποιείται από το 2022 παρέχει προβλήματα σε μια ποικιλία μορφών ερωτήσεων αξιολόγησης με διαφορετικό βαθμό ενσωματωμένης καθοδήγησης και δομής και μια σειρά μορφών που διατηρούν σε όλη τη διάρκεια μια έμφαση σε αυθεντικά προβλήματα που απαιτούν από τους μαθητές να αιτιολογήσουν και να αποδείξουν τη σκέψη τους.

Αναφορές

- [1] Beloit College. (2017). *The Beloit College Mindset List for the Class of 2021*. Retrieved from <https://www.beloit.edu/mindset/2021/>.
- [2] Ananiadou, K., & Claro, M. (2009). *21st Century Skills and Competences for New Millennium Learners in OECD Countries*. OECD Education Working Papers, No. 41. OECD Publishing, Paris. <https://doi.org/10.1787/218525261154>.
- [3] Fadel, C., Bialik, M., & Trilling, B. (2015). *Four-Dimensional Education: The Competencies Learners Need to Succeed*. CreateSpace Independent Publishing Platform.
- [4] National Research Council. (2012). *Education for Life and Work: Developing Transferable Knowledge and Skills in the 21st Century*. The National Academies Press, Washington D.C. Retrieved from https://www.nap.edu/resource/13398/dbasse_070895.pdf.
- [5] Reimers, F., & Chung, C. (2016). *Teaching and Learning for the Twenty-First Century: Educational Goals, Policies, and Curricula from Six Nations*. Harvard Education Press, Cambridge, MA.
- [6] OECD. (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264101739-en>.
- [7] OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264190511-en>.
- [8] OECD. (2017). *PISA for Development Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science, Preliminary Version*. OECD Publishing, Paris. Retrieved from <http://www.oecd.org/about/publishing/corrigenda.htm>.

- [9] Wing, J. (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33-35.
- [10] Wing, J. (2011). Computational Thinking – What and Why? *The Magazine of Carnegie Mellon University's School of Computer Science. The LINK, Research Notebook*.
- [11] Cuny, J., Snyder, L., & Wing, J. (2010). *Demystifying Computational Thinking for Non-Computer Scientists*.
- [12] Gadanidis, G. (2015). *Coding for Young Mathematicians*. Western University, London, Ontario, Canada. Retrieved from <http://worlddiscoveries.ca/technology/18155>.
- [13] Rambally, G. (2017). *Applications of Computational Matrix Algebra*. AACE, Austin, Texas. Retrieved from <https://www.learntechlib.org/p/177277/>.
- [14] Pratt, D., & Noss, R. (2002). The Microevolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness. *Journal of the Learning Sciences*, 11(4), 453-488. https://doi.org/10.1207/S15327809JLS1104_2.
- [15] Gadanidis, G., Clements, E., & Yiu, C. (2018). Group Theory, Computational Thinking, and Young Mathematicians. *Mathematical Thinking and Learning*, 20(1), 32-53. <https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1403542>.
- [16] Pei, C., Weintrop, D., & Wilensky, U. (2018). Cultivating Computational Thinking Practices and Mathematical Habits of Mind in Lattice Land. *Mathematical Thinking and Learning*, 20(1), 75-89. <https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1403543>.
- [17] Weintrop, D., et al. (2016). Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms. *Journal of Science Education and Technology*, 25(1), 127-147. <https://doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5>.

- [18] Wing, J. (2008). Computational Thinking and Thinking About Computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 366, 3717-3725.
- [19] Grover, S. (2018). The 5th 'C' of 21st Century Skills? Try Computational Thinking (Not Coding). *EdSurge News*. Retrieved from <https://www.edsurge.com/news/2018-02-25-the-5th-c-of-21st-century-skills-try-computational-thinking-not-coding>.
- [20] Niemelä, P., et al. (2017). Computational Thinking as an Emergent Learning Trajectory of Mathematics. *Proceedings of the 2017 ACM SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education*, 543-548. <https://doi.org/10.1145/3141880.3141885>.
- [21] Resnick, M., et al. (2009). Scratch: Programming for All. *Communications of the ACM*, 52(11), 60. <https://doi.org/10.1145/1592761.1592779>.
- [22] Galbraith, P., Henn, H., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>.
- [23] Basu, S., et al. (2016). Identifying Middle School Students' Challenges in Computational Thinking-Based Science Learning. *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*, 11(3). <https://doi.org/10.1186/s41039-016-0036-2>.
- [24] Benton, L., et al. (2017). Bridging Primary Programming and Mathematics: Some Findings of Design Research in England. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 3, 115-138. <https://doi.org/10.1007/s40751-017-0028-x>.
- [25] Beheshti, E., et al. (2017). *Computational Thinking in Practice: How STEM Professionals Use CT in Their Work*. Northwestern University, San Antonio, Texas. Retrieved from <http://ccl.northwestern.edu/papers.shtml>.

- [26] OECD. (2017). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematics, Financial Literacy, and Collaborative Problem Solving*. OECD Publishing, Paris.
<https://doi.org/10.1787/9789264281820-en>.
- [27] Box, G., & Draper, N. (1987). *Empirical Model-Building and Response Surfaces*. John Wiley.
- [28] Brennan, K., & Resnick, M. (2012). *New Frameworks for Studying and Assessing the Development of Computational Thinking*. Retrieved from
https://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan_Resnick_AERA_2012_CT.pdf.
- [29] Steen, L. (1990). *On the Shoulders of Giants*. National Academies Press, Washington, D.C. <https://doi.org/10.17226/1532>.
- [30] Devlin, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns: The Search for Order in Life, Mind, and the Universe*. W.H. Freeman & Co.
- [31] Mahajan, S., et al. (2016). *PISA Mathematics in 2021*. Center for Curriculum Redesign. Retrieved from
<http://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Recommendations-for-PISA-Maths-2021-FINAL-EXTENDED-VERSION-WITH-EXAMPLES-CCR.pdf>.
- [32] Moore, D. (1997). New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics. *International Statistical Review*, 65(2), 123-165.
<https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1997.tb00390.x>.
- [33] Watson, J., & Callingham, R. (2003). Statistical Literacy: A Complex Hierarchical Construct. *Statistics Education Research Journal*, 2, 3-46.
- [34] OECD. (2005). *The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary*. OECD, Paris. Retrieved from
<http://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf>.

[35] Hoyles, C., et al. (2002). *Mathematical Skills in the Workplace: Final Report to the Science, Technology, and Mathematics Council*. Institute of Education, University of London. Retrieved from <http://discovery.ucl.ac.uk/1515581/>.

[36] OECD. (2018). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics, and Science*.

[37] Hillman, K., & Thomson, S. (2010). *Against the Odds: Influences on the Post-School Success of 'Low Performers'*. NCVER, Adelaide, Australia. Retrieved from <https://www.ncver.edu.au/publications/publications/all-publications/against-the-odds-influences-on-the-post-school-success-of-low-performers>.

Σημειώσεις

(1) Σε όλο το παρόν πλαίσιο, οι αναφορές σε μαθηματικό συλλογισμό προϋποθέτουν τόσο μαθηματικούς (παραγωγικούς) όσο και στατιστικούς (επαγωγικούς) συλλογισμούς.

(2) Οι επιλεγμένες δεξιότητες προτάθηκαν από τη θεματική συμβουλευτική ομάδα (SAG) του ΟΟΣΑ (PISA 2021 Mathematics: A Brodened Perspective [EDU/PISA/GB(2017)17] με την εύρεση της ένωσης μεταξύ των γενικών δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα και των συναφών αλλά ειδικών για το αντικείμενο δεξιοτήτων που αποτελούν φυσικό μέρος της διδασκαλίας που σχετίζεται με το αντικείμενο. Η συμβουλευτική ομάδα προσδιόρισε οκτώ δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα για να συμπεριληφθούν στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών και, ως τούτου, στο πλαίσιο αξιολόγησης PISA 2022. Οι δεξιότητες αυτές παρατίθενται στην παράγραφο 68.

(3) Η δραστηριότητα αυτή περιλαμβάνεται στον κατάλογο για να υπογραμμιστεί η ανάγκη να συμπεριλάβουν οι υπεύθυνοι ανάπτυξης των εξεταστικών αντικειμένων αντικείμενα που είναι προσβάσιμα από μαθητές που βρίσκονται στο χαμηλότερο άκρο της κλίμακας επιδόσεων.

(4) Οι δραστηριότητες αυτές (**) περιλαμβάνονται στον κατάλογο για να τονιστεί η ανάγκη να συμπεριλάβουν οι υπεύθυνοι ανάπτυξης των θεμάτων αξιολόγησης, ερωτήσεις αξιολόγησης που είναι προσβάσιμα από μαθητές που βρίσκονται στο χαμηλότερο άκρο της κλίμακας επιδόσεων.

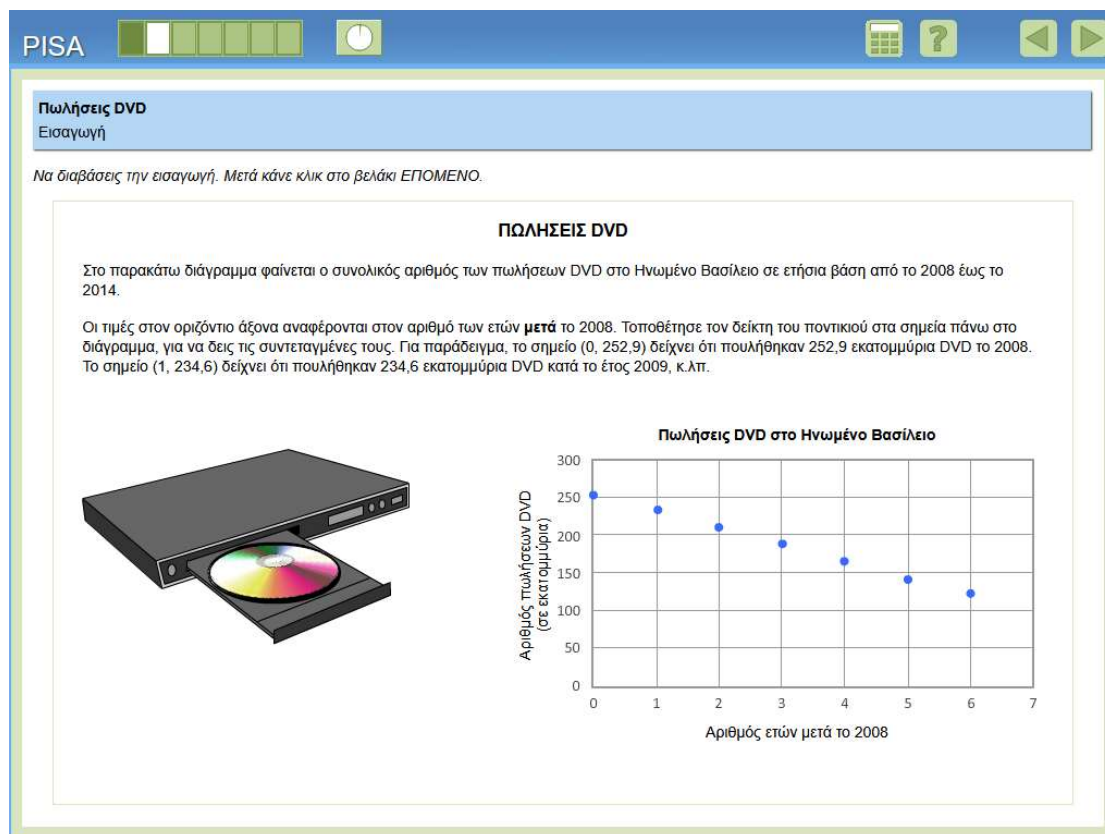
(5) Οι δραστηριότητες αυτές (**) περιλαμβάνονται στον κατάλογο για να τονιστεί η ανάγκη οι υπεύθυνοι για την ανάπτυξη των θεμάτων αξιολόγησης να συμπεριλάβουν αντικείμενα που είναι προσβάσιμα από μαθητές που βρίσκονται στο χαμηλότερο άκρο της κλίμακας επιδόσεων

Ενδεικτικό θέμα

Γνωστικό Αντικείμενο: Μαθηματικά

Θέμα: Πωλήσεις DVD

Πιλοτική Έρευνα PISA 2022



Εικόνα 1

Η Εικόνα 1 είναι η εισαγωγική οθόνη του θέματος. Εκτός από την εισαγωγή του σεναρίου παρέχει στους μαθητές πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο ανάγνωσης και ερμηνείας των δεδομένων που εμφανίζονται στο γράφημα και τους δίνει την ευκαιρία να εξασκηθούν στην τοποθέτηση του δρομέα πάνω στα σημεία προκειμένου να δουν τα δεδομένα που εμφανίζονται, δεδομένα τα οποία είναι απαραίτητα για τις απαντήσεις στις σχετικές ερωτήσεις. Στις δύο πρώτες ερωτήσεις του θέματος τα δεδομένα παρουσιάζονται κατά τρόπο ώστε η ανεξάρτητη μεταβλητή να είναι ο αριθμός των ετών μετά το 2008 και η εξαρτημένη μεταβλητή να είναι ο αριθμός των DVD που πωλήθηκαν, σε εκατομμύρια. Για παράδειγμα, το σημείο (0, 252,9) αντιστοιχεί στο έτος 2008 με 252,9 εκατομμύρια DVD που

πωλήθηκαν εκείνο το έτος, το σημείο (1, 234,6) αντιστοιχεί στο έτος 2009 (δηλαδή 1 έτος μετά το 2008) με 234.6 εκατομμύρια DVD που πωλήθηκαν εκείνο το έτος κ.λπ.

Ερώτηση 1:

PISA

Πωλήσεις DVD
Ερώτηση 1 / 3

Να λάβεις υπόψη το «Πωλήσεις DVD» στα δεξιά. Κάνε κλικ στις επιλογές του πίνακα, για να απαντήσεις στην ερώτηση.

Ισχύουν οι προτάσεις στον παρακάτω πίνακα με βάση τις πληροφορίες που φαίνονται στο διάγραμμα. Κάνε κλικ στο **Ναι** ή στο **Όχι** για κάθε πρόταση.

Πρόταση	Ναι	Όχι
Ο αριθμός των πωλήσεων DVD μειώθηκε περίπου κατά 50% από το 2008 έως το 2014.	☐	☐
Ο αριθμός των πωλήσεων DVD μειωνόταν κάθε χρόνο κατά την ίδια ποσότητα από το 2008 έως το 2014.	☐	☐
Η κλίση της ευθείας αναπαριστά τη μέση ετήσια μείωση των πωλήσεων DVD από το 2008 έως το 2014.	☐	☐

ΠΩΛΗΣΕΙΣ DVD

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται ο συνολικός αριθμός των πωλήσεων DVD στο Ηνωμένο Βασίλειο σε ετήσια βάση από το 2008 έως το 2014.

Οι τιμές στον οριζόντιο άξονα αναφέρονται στον αριθμό των ετών **μετά** το 2008. Τοποθέτησε τον δείκτη του ποντικιού στα σημεία πάνω στο διάγραμμα, για να δεις τις συντεταγμένες τους. Για παράδειγμα, το σημείο (0, 252,9) δείχνει ότι πουλήθηκαν 252,9 εκατομμύρια DVD το 2008. Το σημείο (1, 234,6) δείχνει ότι πουλήθηκαν 234,6 εκατομμύρια DVD κατά το έτος 2009, κ.λπ.

Στο διάγραμμα προστέθηκε μια ευθεία γραμμή, για να μοντελοποιήσει αυτά τα σημεία δεδομένων.

Πωλήσεις DVD στο Ηνωμένο Βασίλειο

Αριθμός ετών μετά το 2008	Αριθμός πωλήσεων DVD (σε εκατομμύρια)
0	252,9
1	234,6
2	216,3
3	198,0
4	179,7
5	161,4
6	143,1

Εικόνα 2

Στην πρώτη ερώτηση του θέματος οι μαθητές βλέπουν έναν πίνακα που περιέχει τρεις δηλώσεις σχετικά με τις πωλήσεις DVD στο Ηνωμένο Βασίλειο για τα έτη 2008 έως 2014 και πρέπει να αποφασίσουν εάν κάθε δήλωση υποστηρίζεται από τις πληροφορίες που φαίνονται στο γράφημα. Σημειώστε ότι οι πληροφορίες από την εισαγωγή σχετικά με τον τρόπο ερμηνείας των δεδομένων επαναλαμβάνονται στο πλαίσιο δεξιά. Επίσης προστέθηκε μια επιπλέον παράγραφος προκειμένου να ενημερώσει τους μαθητές σχετικά με τη γραμμή που προστέθηκε στο γράφημα. Επίσης, είναι ενεργά μόνο τα επτά σημεία των δεδομένων που εμφανίζονται. Κατά συνέπεια, οι μαθητές δεν μπορούν να τοποθετήσουν τον κέρσορα οπουδήποτε κατά μήκος της

γραμμής για να λάβουν δεδομένα, καθώς είναι διαθέσιμα μόνο στα επτά σημεία που εμφανίζονται στο γράφημα.

Η **πρώτη δήλωση** υποστηρίζεται από τα δεδομένα.

Οι μαθητές μπορούν να επαληθεύσουν αυτή τη δήλωση με δύο τρόπους:

(α) να υπολογίσουν την ποσοστιαία μείωση των πωλήσεων DVD από το 2008 έως το 2014 [δηλ. $(252,9 - 124,9) \div 252,9$], πραγματική μείωση 50,61% (η οποία υποστηρίζει τη δήλωση μείωσης των πωλήσεων κατά περίπου 50%) ή
(β) να υπολογίσουν την αναλογία των DVD που πωλήθηκαν το 2014 έως το 2008 (δηλ. $124,9 \div 252,9$) προκειμένου να διαπιστώσουν ότι ο αριθμός των DVD που πωλήθηκαν το 2014 είναι το 49,39% του αριθμού που πωλήθηκαν το 2008 (ποσοστό το οποίο επίσης είναι "περίπου 50%" όπως αναφέρεται στη δήλωση).

Η **δεύτερη δήλωση** δεν υποστηρίζεται από τα δεδομένα. Οι μαθητές πρέπει να εξετάσουν τη διαφορά στον αριθμό των DVD που πωλούνται σε κάθε σημείο, προκειμένου να διαπιστώσουν ότι η δήλωση δεν ευσταθεί. Ωστόσο, τέσσερις από τις έξι διαφορές δείχνουν μια παρόμοια διαφορά (μεταξύ 18 και 19 εκατομμυρίων λιγότερων DVD που πωλήθηκαν). Μεταξύ 2009 και 2010 η διαφορά είναι 24,5 εκατομμύρια (λιγότερα) DVD και μεταξύ 2011 και 2012 η διαφορά είναι 29,8 εκατομμύρια (λιγότερα) DVD.

Η **τρίτη δήλωση** υποστηρίζεται από τα δεδομένα. Οι μαθητές μπορούν να ερμηνεύσουν ότι ένα γραμμικό μοντέλο σημαίνει ένα σταθερό ρυθμό αλλαγής, το οποίο σε αυτή την περίπτωση, λόγω της αρνητικής κλίσης, σημαίνει ότι οι πωλήσεις DVD μειώνονται κατά το ίδιο μέσο ποσό κάθε χρόνο.

Για τη συγκεκριμένη ερώτηση, η πλήρης ανταπόκριση αντιστοιχεί σε επίπεδο μέτριας δυσκολίας (επίπεδο 4), ενώ η μερική ανταπόκριση αντιστοιχεί σε χαμηλό επίπεδο (επίπεδο 1α).

Κωδικός Ερώτησης:	Πωλήσεις DVD - CMA106Q01
Περιοχή:	Αβεβαιότητα και δεδομένα
Διεργασία:	Ερμηνεία/Αξιολόγηση
Πλαίσιο:	Κοινωνικό
Μορφή ερώτησης:	Σύνθετη πολλαπλής επιλογής
Απαντήσεις:	Αποδεκτή απάντηση: Ναι – Όχι – Ναι (με τη σειρά που εμφανίζονται οι επιλογές) Μερικώς αποδεκτή απάντηση: οποιεσδήποτε δύο
Επίπεδο Δυσκολίας:	Επίπεδο 4 (Αποδεκτή απάντηση) Επίπεδο 1α (Μερικώς αποδεκτή απάντηση)

Ερώτηση 2:

Πωλήσεις DVD

Ερώτηση 2 / 3

Να λάβεις υπόψη το «Πωλήσεις DVD» στα δεξιά.
 Πληκτρολόγησε την απάντησή σου στην ερώτηση,
 χρησιμοποιώντας τα πλήκτρα των αριθμών.

Η εξίσωση της ευθείας είναι $d = 254 - 22n$, όπου το d είναι ο αριθμός των πωλήσεων DVD (σε εκατομμύρια) και το n είναι ο αριθμός των ετών μετά το 2008.

Αν αυτή η τάση των πωλήσεων συνεχιστεί, σε ποιο έτος ο αριθμός των πωλήσεων DVD θα είναι χαμηλότερος από 1 εκατομμύριο σύμφωνα με το μαθηματικό μοντέλο;

Απάντηση:

ΠΩΛΗΣΕΙΣ DVD

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται ο συνολικός αριθμός των πωλήσεων DVD στο Ηνωμένο Βασίλειο σε ετήσια βάση από το 2008 έως το 2014.

Οι τμές στον οριζόντιο άξονα αναφέρονται στον αριθμό των ετών **μετά** το 2008. Τοποθέτησε τον δείκτη του ποντικιού στα σημεία πάνω στο διάγραμμα, για να δεις τις συντεταγμένες τους. Για παράδειγμα, το σημείο (0, 252,9) δείχνει ότι πουλήθηκαν 252,9 εκατομμύρια DVD το 2008. Το σημείο (1, 234,6) δείχνει ότι πουλήθηκαν 234,6 εκατομμύρια DVD κατά το έτος 2009, κ.λπ.

Στο διάγραμμα προστέθηκε μια ευθεία γραμμή, για να μοντελοποιήσει αυτά τα σημεία δεδομένων.

Αριθμός ετών μετά το 2008	Αριθμός πωλήσεων DVD (σε εκατομμύρια)
0	252.9
1	234.6
2	216.3
3	198.0
4	179.7
5	161.4
6	143.1

Εικόνα 3

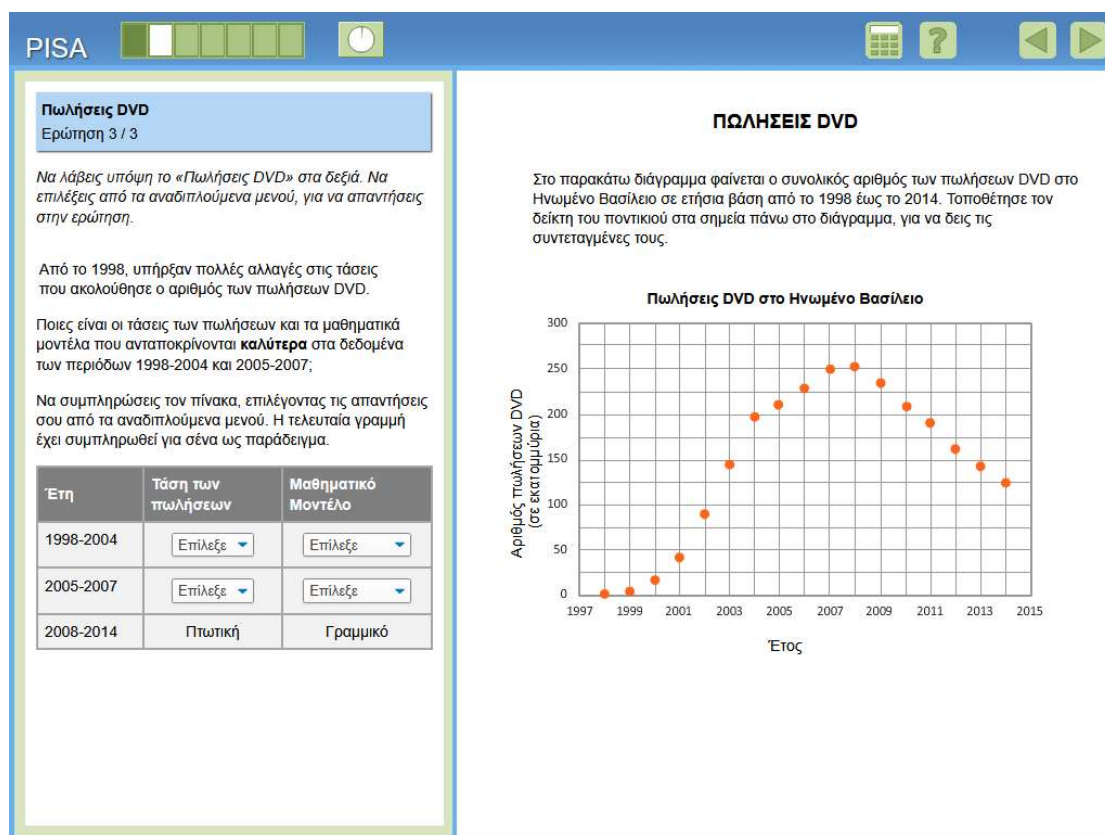
Στη δεύτερη ερώτηση δίνεται στους μαθητές η εξίσωση του γραμμικού μοντέλου και καλούνται να χρησιμοποιήσουν το μοντέλο προκειμένου να εκτιμήσουν σε ποιο έτος οι πωλήσεις DVD θα πέσουν πρώτα κάτω από το ένα εκατομμύριο, ένα σημείο δεδομένων που δεν φαίνεται στο γράφημα.

Σημειώστε ότι οι μαθητές θα μπορούσαν και πάλι να τοποθετήσουν το δείκτη του ποντικιού πάνω στα σημεία δεδομένων (αλλά μόνο στα επτά σημεία δεδομένων που εμφανίζονται). Χρησιμοποιώντας το δεδομένο μοντέλο, οι μαθητές μπορούν να λύσουν μια ανισότητα όπως $254 - 22n < 1$, η οποία θα οδηγήσει σε $n > 11,5$. Ωστόσο, δεδομένου ότι το n αντιπροσωπεύει έτη μετά το 2008, οι μαθητές μπορούν να μετατρέψουν την τιμή σε έτος. Σε αυτό το σενάριο, το 11 αντιστοιχεί στο τέλος του 2019, και το 12 αντιστοιχεί στο τέλος του 2020, επομένως η λύση (11,5) από τη χρήση του μοντέλου συνεπάγεται ότι οι πωλήσεις DVD θα πέσουν πρώτα κάτω από το ένα εκατομμύριο κατά τη διάρκεια του έτους 2020.

Αποδεκτή απάντηση στην ερώτηση είναι το έτος 2020. Ωστόσο, εάν ένας μαθητής απαντήσει με 11,5, αποτυγχάνοντας να μετατρέψει σωστά αυτόν τον αριθμό σε έτος (2020) ή απαντά με το 2019 (υποθέτοντας ότι υπολόγισε σωστά το 11,5 αλλά στη συνέχεια το μετέτρεψε λάθος σε 2019 αντί για 2020), τότε η απάντηση θεωρείται μερικώς αποδεκτή. Η μερικώς αποδεκτή απάντηση αντιστοιχεί σε επίπεδο 5 ενώ η αποδεκτή απάντηση αντιστοιχεί σε επίπεδο 6.

Κωδικός Ερώτησης:	Πωλήσεις DVD – CMA106Q02
Περιοχή:	Αλλαγή και σχέσεις
Διεργασία:	Διατύπωση
Πλαίσιο:	Κοινωνικό
Μορφή ερώτησης:	Ανοικτού τύπου ερώτηση
Απαντήσεις:	Αποδεκτή απάντηση: 2020 Μερικώς αποδεκτή απάντηση: 2019 ή 11.5
Επίπεδο Δυσκολίας:	Επίπεδο 6 (Αποδεκτή απάντηση) Επίπεδο 5 (Μερικώς αποδεκτή απάντηση)

Ερώτηση 3:



Εικόνα 4

Στην τρίτη ερώτηση παρουσιάζεται στους μαθητές ένα μεγαλύτερο σύνολο δεδομένων που δείχνει τις πωλήσεις DVD στο Ηνωμένο Βασίλειο από το 1998 έως το 2014. Ωστόσο, σε αυτό το στοιχείο, η ανεξάρτητη μεταβλητή για αυτά τα σημεία δεδομένων είναι το πραγματικό έτος αντί για τον αριθμό των ετών μετά το 2008. Τα στοιχεία για τα έτη 2008 έως 2014 είναι τα ίδια δεδομένα που παρουσιάστηκαν στα δύο πρώτα στοιχεία αυτής της ενότητας.

Στους μαθητές δίνεται ένας πίνακας με το σύνολο δεδομένων χωρισμένο σε μικρότερα εύρη ετών και πρέπει να προσδιορίσουν ποιο είδος τάσης πωλήσεων (αυξητική ή πτωτική) και ποιος τύπος μαθηματικού μοντέλου (γραμμικό ή μη γραμμικό) αντιπροσωπεύει καλύτερα τα δεδομένα για τα καθορισμένα έτη.

Δεδομένου ότι οι μαθητές είχαν ήδη εργαστεί με τα δεδομένα από το 2008

έως το 2014 στις δύο πρώτες ερωτήσεις του θέματος, οι απαντήσεις ήταν προσυμπληρωμένες στον πίνακα.

Έτη	Τάση των πωλήσεων	Μαθηματικό Μοντέλο
1998-2004	Επίλεξε	Επίλεξε
2005-2007	Επίλεξε	Επίλεξε
2008-2014	Αυξητική Πτωτική	Γραμμικό

Έτη	Τάση των πωλήσεων	Μαθηματικό Μοντέλο
1998-2004	Επίλεξε	Επίλεξε
2005-2007	Επίλεξε	Επίλεξε
2008-2014	Πτωτική	Γραμμικό Μη γραμμικό

Σημειώστε ότι για το μαθηματικό μοντέλο, ο στόχος ήταν οι μαθητές να είναι σε θέση να διακρίνουν μεταξύ δεδομένων που μπορούν να μοντελοποιηθούν, χρησιμοποιώντας ένα γραμμικό μοντέλο και δεδομένων που δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν χρησιμοποιώντας ένα γραμμικό μοντέλο. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιείται η γενική επιλογή του "μη γραμμικού" σε αντίθεση με συγκεκριμένους τύπους μη γραμμικών μοντέλων που θα ταιριάζουν καλύτερα στα δεδομένα για τα έτη 1998 έως 2004.

Η ερώτηση είναι μέτριας δυσκολίας (Επίπεδο 3) εφόσον γίνουν 4 σωστές επιλογές. Μερικώς αποδεκτές απαντήσεις είναι όσες έχουν δύο σωστές επιλογές για οποιοδήποτε εύρος ετών. Στην τελευταία περίπτωση (μερικώς αποδεκτές απαντήσεις) αντιστοιχούν σε σχετικά εύκολο επίπεδο (επίπεδο 1α). Δεν είναι αποδεκτές απαντήσεις που κάνουν μία σωστή επιλογή σε κάθε εύρος ετών.

Κωδικός Ερώτησης:	Πωλήσεις DVD - CMA106Q03
Περιοχή: περιεχομένου:	Αλλαγή και σχέσεις
Διεργασία:	Ερμηνεία/Αξιολόγηση
Πλαίσιο:	Κοινωνικό

Μορφή ερώτησης:	Σύνθετη πολλαπλής επιλογής
Απαντήσεις:	Αποδεκτή απάντηση: 1998-2004: αυξητική, μη γραμμικό, 2005-2007: αυξητικό, γραμμικό Μερικώς αποδεκτή απάντηση: Σωστές επιλογές μόνο για την περίοδο 1998-2004 ή Σωστές επιλογές μόνο για την περίοδο 2005-2007 ή οποιεσδήποτε τρεις σωστές επιλογές
Επίπεδο Δυσκολίας:	Επίπεδο 3 (Αποδεκτή απάντηση) Επίπεδο 1α (Μερικώς αποδεκτή απάντηση)